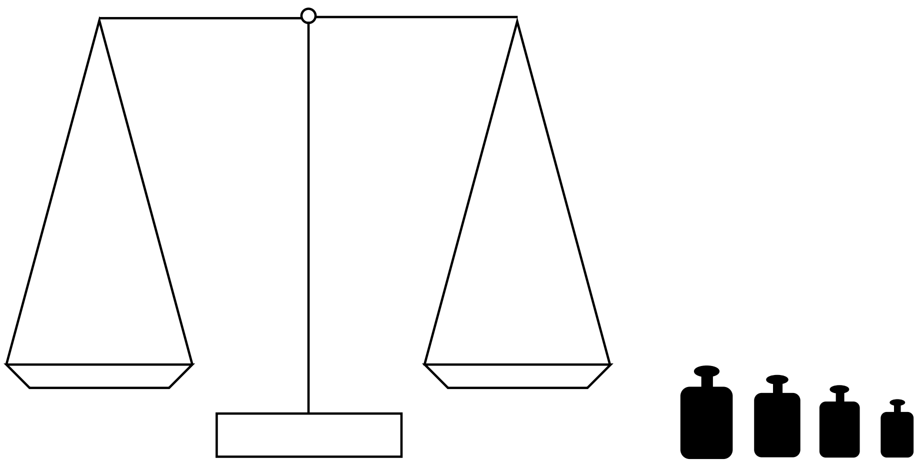
Trojiski sestav

Zaradi računalnikov je pomen binarnih sestavov očiten. Človek bi pomislil, da mora biti nekoliko težje najti primer, ki bi nas 'prisilil' razmišljati v trojiškem sestavu. Pa temu sploh ni tako. Oglejmo si naslednjo nalogo iz M. Rutarjeve knjige 'Svet matematike, Priročnik in vaje iz matematike za 5. razred osnovne šole' (poglavje Računske operacije v množici naravnih števil, str. 65, nal. 11), ki je označena z utežjo:

Koliko kg naj tehta vsaka od štirih uteži, da bi lahko na narisani tehtnici natehtali količine od enega do 40 kg?



V rešitvah lahko najdemo samo odgovor, ne pa tudi kako priti do njega. Seveda gre za dobro znano nalogo, ki jo je nekaj kolegov poznalo še iz otroških let, vendar pa ni znal nihče na hitro postreči z utemeljitvijo, zakaj je dani odgovor pravi.

Z $x \geq y \geq z \geq t$ označimo iskane uteži. Potem mora množica števil

$$U = \{ax + by + cz + dt \,|\, a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}\} \tag{1}$$

(-1 pomeni, da smo utež postavili na nasprotno stran, nič pa, da utež sploh ne uporabljamo) vsebovati vsa števila od 1 do 40. Očitno je množica U, če jo predstavimo na realni osi, simetrična glede na izhodišce, saj iz $ax+by+cz+dt \in U$ sledi $-ax-by-cz-dt \in U$. Zato so v množici U tudi števila od -1 do -40 ter seveda 0. Skupaj je torej v množici U vsaj $81 = 3^4$ števil. Več pa jih ne more biti, saj imamo za vsako izmed števil a, b, c in d le tri možnosti, t.j.

(1) $U = \{-40, -39, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., 39, 40\}$.

Zaključimo:

(2) vsako število iz množice U se da zapisati na en sam način v obliki $ax + by + cz + dt$.

Od tod sledi, da so uteži x, y, z in t različna naravna števila, vsota vseh uteži nam da seveda največjo vrednost: $40 = x + y + z + t$, drugo največjo vrednost dobimo le tako, da ne uporabimo najlažjo utež: $39 = x + y + z$. Od tod dobimo $t = 1$ ter $38 = x + y + z - 1$. Število z ne more biti enako 2, saj bi 38 lahko dobili tudi z $x + y + t$, kar je v nasprotju z lastnostjo (2). Torej je $z \geq 3$ in mora biti $37 = x + y + 1$. Zaključimo $z = 3$, $36 = x + y$, $35 = x + y - 1$, $34 = x + y - 3 + 1$, $33 = x + y - 3$, $32 = x + y - 3 - 1$. Na podoben način se prepričamo, da mora zaradi lastnosti (2) veljati $y \geq 9$ in $31 = x + 3 + 1$. Torej je $x = 27$ in $y = 9$.

Prepričati se moramo le še, da za četverico $(x, y, z, t) = (27, 9, 3, 1)$ res velja (1) oziroma da lahko zapišemo vsa števila od 0 do $80 = 2222_3$ v naslednji obliki

$$a \cdot 27 + b \cdot 9 + c \cdot 3 + d \cdot 1 = \overline{abcd}_3 \qquad \text{za } a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$$

To pa res ni težko, saj nas že v 5. razredu učijo šteti tudi v trojiškem sestavu:

0 0	1 1	2 2	3 10_3	4 11_3	5 12_3	6 20_3	7 21_3	8 22_3
9 100_3	10 101_3	11 102_3	12 110_3	13 111_3	14 112_3	15 120_3	16 121_3	17 122_3
18 200_3	19 201_3	20 202_3	21 210_3	22 211_3	23 212_3	24 220_3	25 221_3	26 222_3
27 1000_3	28 1001_3	29 1002_3	30 1010_3	31 1011_3	32 1012_3	33 1020_3	34 1021_3	35 1022_3
36 1100_3	37 1101_3	38 1102_3	39 1110_3	40 1111_3	41 1112_3	42 1120_3	43 1121_3	44 1122_3
45 1200_3	46 1201_3	47 1202_3	48 1210_3	49 1211_3	50 1212_3	51 1220_3	52 1221_3	53 1222_3
54 2000_3	55 2001_3	56 2002_3	57 2010_3	58 2011_3	59 2012_3	60 2020_3	61 2021_3	62 2022_3
63 2100_3	64 2101_3	65 2102_3	66 2110_3	67 2111_3	68 2112_3	69 2120_3	70 2121_3	71 2122_3
72 2200_3	73 2201_3	74 2202_3	75 2210_3	76 2211_3	77 2212_3	78 2220_3	79 2221_3	80 2222_3

Trditev, da lahko vsako naravno število zapišemo na natanko en način v sistemu z osnovo $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$ (glej M. Vencelj, Mala šola številskih sestavov, *Presek* **30** (2002-03), str. 213–217), smo na naši poti dokazali le delno, a je očitno, da sedaj do splošne rešitve ni več daleč.

Aleksandar Jurišić