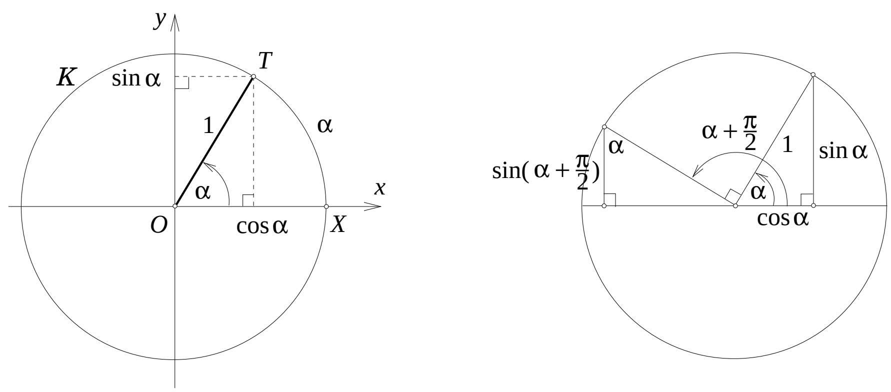
Presek, salama in sinus

2. marec, 2002

V naravi srečujemo najrazličnejše geometrijske oblike, ko pa jih zagledamo na tabli pri matematiki ali fiziki, jih včasih ne prepoznamo in nas celo prestrašijo. To so občutili na svoji koži tudi antični geometri, ko so želeli dokazati kakšno navidez očitno geometrijsko dejstvo. V tem sestavku se bomo naučili, kako priti hitro do sinusoide.

Premice in ravnine si že vsi zelo dobro predstavljamo. Kako pa je s krivuljami? Krožnico, elipso, parabolo in hiperbolo (tako imenovane *krivulje drugega reda*) lahko najdemo že na stožcu (vsi možni preseki plašča stožca z ravnino) in jih zato tudi imenujemo *stožernice*. Glej npr. članek M. Prosena, Kako do enačbe sence?, *Presek* **29**, str. 144-148. Kje pa najdemo kotne oziroma trigonometrične funkcije? Že samo ime nam pove, da so povezane s koti in trikotniki. Tako jih definiramo (glej sliko 1), vendar pa se lahko vprašamo še, kje v naravi naletimo na njihove grafe oziroma oblike.



(a) (b)

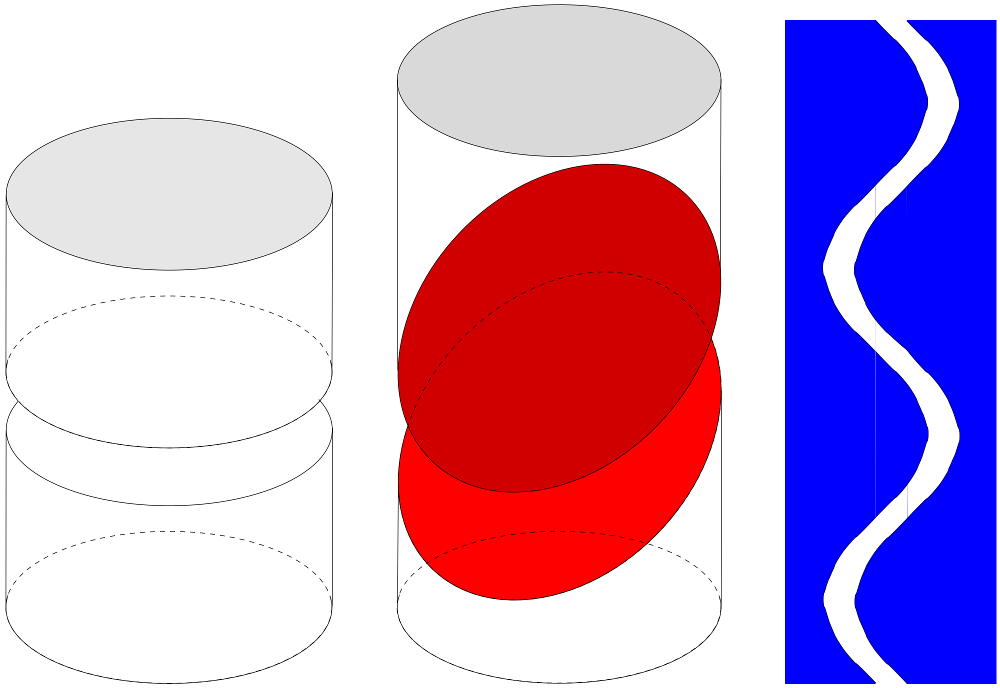
Slika 1: (a) Definiciji *sinusa* in *kosinusa*. V ravnini narišemo enotsko krožnico $\mathcal{K}$ s središčem O v izhodišču koordinatnega sistema. Iz točke $X = (1, 0)$ se v nasprotni smeri od urinega kazalca poda na pot po krožnici $\mathcal{K}$ točka T. Ko ima za seboj "prehojen" lok dolžine α (takrat je kot $\angle XOT$ enak α radianov), ima točka T x-koordinato $\cos\alpha$ in y-koordinato $\sin\alpha$. Funkcija sinus je pozitivna v prvem in drugem kvadrantu, funkcija cosinus pa v prvem in četrtem. Obe funkciji sta periodični s periodo 2π (tj. $360°$). (b) Iz Pitagorovega izreka sledi zveza $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, še lažje pa se je prepričati o drugi zvezi: $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$.

Iskanje sinusoide

Sinusoido bomo kot pravi presekovci našli s pomočjo preseka. Na valj z radijem 1 navijemo papir. En tak primer je črevo, ki objema salamo. Saj veste, to je tisti neprijetni "papir", ki ga moramo odstraniti, kadar želimo narezati salamo (ali pa se ga znebiti po rezanju, če tega nismo storili prej).

> *Če prerežemo salamo (valj z radijem 1) z ravnim nožem pod kotom $45°$ in razvijemo papir (črevo), dobimo sinusoido. Glej sliko 2(b,c).*

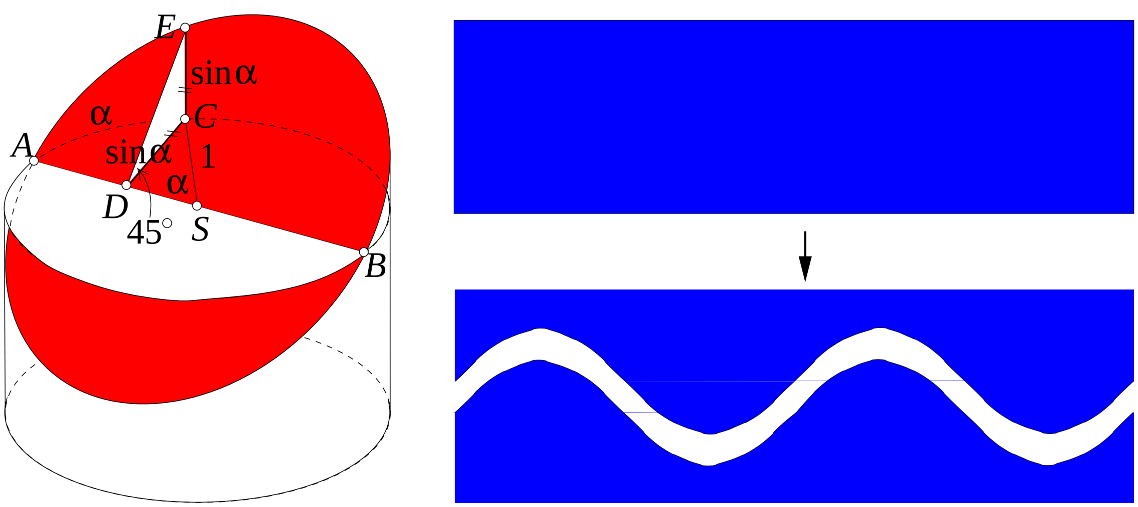
Prepričajmo se, da je res tako! Najprej narišimo pravokotni presek valja (glej sliko 2a). Gre seveda za enotski krog, njegovo središče pa označimo s S (glej sliko 3(a)).



(a) (b) (c)

Slika 2: Sinusoida na valju. V našem primeru smo navili papir dvakrat okoli valja.

Nato narišimo premer AB in končno pobarvajmo z rdečo še presek ravnine, ki seka enotski krog v daljici AB pod kotom 45° (glej sliko 3(a)). Po tej ravnini je med rezanjem drsel nož. Presek je seveda elipsa (pa naj si je videti še tako okrogla), a tega dejstva pravzaprav ne bomo nikjer uporabili. Iz točke A se podajmo na sprehod po izbranem enotskem krogu pod elipso. Naša naloga je pokazati, da smo od točke na elipsi, ki je ravno nad nami, oddaljeni natanko za sinus poti, ki smo jo že prehodili.



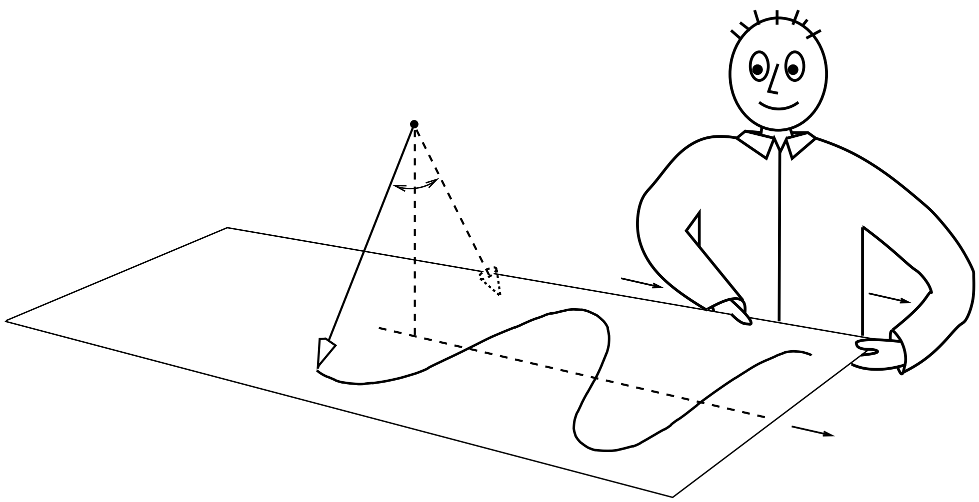
(a) (b)

Slika 3: Sinusoida na valju.

Na enotskem krogu si izberimo tako točko C, da bo kot $\angle ASC$ enak α. Potem je dolžina loka AC enaka α, če smo seveda merili kot α v radianih. Sedaj pa narišimo še pravokotnici iz točke C na premer AB in na ravnino v kateri leži izbrani enotski krog. Le-ti sekata premer AB in rdečo elipso zaporedoma v točkah D in E. S slike 1 smo si zapomnili, da je dolžina daljice CD ravno $\sin\alpha$. Trikotnik DCE je pravokotni trikotnik, kot pri oglišču D pa je enak $45°$. To pomeni, da gre za enakokrak trikotnik in je $\overline{CE} = \overline{CD} = \sin\alpha$, kar smo tudi želeli pokazati.

Bralcem priporočava, če nimajo salame, naj poskusijo naviti papir na svečo.

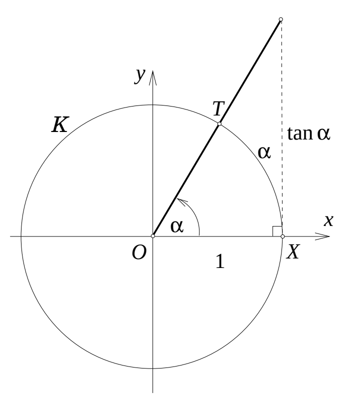
Kje pa bodo našli sinusoido fiziki? Najpogosteje naletijo nanjo pri raznih periodičnih pojavih, kot so mehanska ali elektromagnetna nihanja in valovanja (npr. običajno mehansko nihalo - dokler je odmik od ravnovesne lege majhen; izmenični tok; svetloba določene valovne dolžine).



Slika 4: Slika je izposojena iz Kladnikovega univerzitetnega učbenika.

Naloge

Na koncu zastavimo zagnanim presekovcem še nekaj vprašanj. Kako priti do kosinusoide čivkajo že ptiči, medtem ko je iskanje tangensoide (kjer je $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ - glej sliko 4) precej trši oreh.



Slika 4: Neposredno iz definicije funkcije tangens sledi, da je $\tan\alpha$, za $0 \leq \alpha < \pi/2$, enak razdalji med točko X in presečiščem premice OT s pravokotnico na os x v točki X.

1. Dokaži, da je presek plašča valja in ravnine elipsa (glej sliko 2(b))!

2. Zapiši enačbo krivulje, ki jo dobimo, če z nožem prerežemo valj s polmerom 1 pod kotom 60°!

3. Kakšno senco meče luč s cilindričnim senčnikom na navpično steno? (Nasvet: morda pomaga, če si najprej zadamo konkreten primer, za luč si izberimo točko (0,0,0), za senčnik $x^2 + y^2 = 1$, $-1 < z < 1$, snop luči je rob sence oziroma stožec $x^2 + y^2 = z^2$, stena pa ravnina $x = 2$.)

Naslednjič bomo s presekom sestavili kode za odpravljanje napak.

Robert Bakula in Aleksandar Jurišić