

KONGRUENCE IN EULERJEV IZREK

Pogovarjali se bomo o lastnostih celih števil. S pojmom *kongruenca* smo se seznanili v "ogrevanju", v pričujočem sestavku pa bomo najprej na kratko orisali osnovne pojme, nato pa nanizali nekaj rezultatov.

Beseda kongruenca izvira iz latinske besede *congruens*, ki označuje ustreznost oziroma sovpadanje. Nas bodo zanimali ostanki pri deljenju celih števil z določenim naravnim številom m , ki ga bomo imenovali *modul* (lat. *modulus* – mera).

Za dve celi števili a in b bomo rekli, da sta *kongruentni po modulu m* , če pri deljenju s številom m dasta enak ostanek r . Zapis $a \equiv b \pmod{m}$ torej pomeni, da je

$$a = k_1 m + r \quad \text{in} \quad b = k_2 m + r \quad (1)$$

kjer je r ostanek pri deljenju z m (torej $0 \leq r < m$).

Hitro se lahko prepričamo, da je zgornja definicija kongruence ekvivalentna naslednji.

IZREK 1. $a \equiv b \pmod{m}$ takrat in samo takrat, ko je razlika števila a in b deljiva s številom m .

Dokaz. Res, če med seboj odštejemo enakosti (1), dobimo $a - b = (k_1 - k_2)m$ obratno pa iz $a - b = km$ in $a = k_1 m + r$ sledi $b = (k_1 - k)m + r$, torej sta ostanka deljenja števil a in b z m enaka. $\square$

Kongruence imajo veliko podobnih lastnosti kot navadne enakosti. Oglejmo si jih nekaj.

IZREK 2. Če je $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ in $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, potem je tudi $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$ in $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$.

Dokaz. Razliki $a_1 - b_1$ in $a_2 - b_2$ sta deljivi z m , zato je deljiva z m tudi njuna vsota, ki jo lahko zapišemo v obliki $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)$, kar dokazuje prvi del izreka. Naj bo $a_1 = b_1 + k_1 m$ in $a_2 = b_2 + k_2 m$. Potem je tudi $a_1 a_2 = b_1 b_2 + (b_1 k_2 + k_1 b_2 + k_1 k_2 m)m$, od koder sledi drugi del našega izreka. $\square$

IZREK 3. Relacija $a \equiv b \pmod{m}$ velja takrat in samo takrat, ko je $ca \equiv cb \pmod{cm}$ za poljubno naravno število c . Iz kongruence $a \equiv b \pmod{m}$ sledi kongruenca $a \equiv b \pmod{m_1}$, kjer je m_1 poljuben delitelj števila m .

Dokaz. Prva trditev očitno sledi iz ekvivalentnosti naslednjih enakosti: $a - b = km$ in $ca - cb = kcm$. Za dokaz druge trditve naj bo $a - b = km$ in

$m = m_1 m_2$. Potem je tudi $a - b = (km_2)m_1$, kar smo želeli dokazati. $\square$

IZREK 4. Naj bo $ca \equiv cb \pmod{m}$ in največji skupni delitelj števil c in m (označujemo ga z $D(c, m)$) enak 1. Potem je tudi $a \equiv b \pmod{m}$.

Dokaz. Vemo, da je $c(a - b) = km$ in da števili c in m nimata skupnih deliteljev razen števila 1. Torej mora biti $k = ck_1$, $k_1 \in \mathbb{N}$, od koder vidimo, da je $a - b = k_1 m$ oziroma $a \equiv b \pmod{m}$. $\square$

Razdelimo množico vseh celih števil na paroma disjunktne podmnožice, ki jim bomo rekli *razredi števil po modulu m* , tako da v isti razred uvrstimo vsa cela števila, ki dajo pri deljenju z m enak ostanek. Vsako množico iz m števil, od katerih nobeni dve nista iz istega razreda po modulu m , bomo imenovali *kompletna množica predstavnikov po modulu m* . *Reducirana množica predstavnikov po modulu m* pa bomo rekli podmnožici kompletne množice, sestavljeni iz vseh tistih števil, ki so tuja številu m . Označimo reducirano množico, dobljeno iz kompletne množice $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ z R_m , število elementov v njej pa s $\varphi(m)$.

Primer 1. $R_6 = \{1, 5\}$, $\varphi(6) = 2$ in
 $R_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\varphi(7) = 6$

Na ta način smo opredelili funkcijo $\varphi: n \mapsto \varphi(n)$ za vsa naravna števila n . Imenujemo jo Eulerjeva funkcija. Očitno je za vsako praštevilo p vrednost $\varphi(p)$ enaka $p - 1$.

Reducirane množice imajo naslednjo pomembno lastnost.

IZREK 5. Če sta števili a in m tuji, potem je množica $\{ax: x \in R_m\}$ reducirana množica predstavnikov po modulu m .

Dokaz. Iz $D(a, m) = 1$ in $D(x, m) = 1$ sledi enakost $D(ax, m) = 1$, torej se moramo prepričati le, da vsa števila ax , $x \in R_m$, pripadajo različnim razredom po modulu m . To pa dobimo s pomočjo izreka 4. Iz $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m}$ bi namreč dobili $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$, to pa nasprotuje dejstvu, da so vrednosti spremenljivke x v reducirani množici R_m predstavnikov po modulu m . $\square$

Naslednja trditev je znana pod imenom Eulerjev izrek.

IZREK 6. Naj bo $m > 1$ in $D(a, m) = 1$. Potem je $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Dokaz. Označimo s c vrednost $\varphi(m)$ in z $r_1, r_2, \dots, r_c$ elemente množice R_m . Naj bo za vsako celo število i ($1 \leq i \leq c$) q_i najmanjši pozitivni predstavnik razreda, ki mu pripada število ar_i . Potem zaradi druge lastnosti kongruence,

navedene v izreku 1, velja:

$$a^c r_1 r_2 \dots r_c \equiv q_1 q_2 \dots q_c \pmod{m} \quad (2)$$

Po pravkar dokazani lastnosti reduciranih množic (izrek 5) pa je $r_1 r_2 \dots r_c = q_1 q_2 \dots q_c$, zato z uporabo izreka 4 iz (2) dobimo $a^c \equiv 1 \pmod{m}$, kar je bilo treba dokazati. $\square$

Če vzamemo za modul m praštevilo p in uporabimo zgoraj navedeno lastnost Eulerjeve funkcije, dobimo naslednjo posledico izreka 6, ki je znana kot Fermatov izrek.

Posledica. Za praštevilo p velja $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, če število a ni večkratnik števila p oziroma $a^p \equiv a \pmod{p}$ pri poljubnem naravnem številu a .

Z uporabo kongruenc in njihovih lastnosti si lahko znatno olajšamo reševanje mnogih nalog v zvezi z deljivostjo števil. Pri tem nam pogosto pomagata tudi Eulerjev ali Fermatov izrek.

Primer 2. Kakšen je ostanek pri deljenju števila 1985^{1985} s 7?

Najprej opazimo, da je $1985 \equiv 4 \pmod{7}$, torej je tudi $1985^{1985} \equiv 4^{1985} \pmod{7}$. Ker je $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$, dobimo odtod kongruenco $1985^{1985} \equiv 4^2 \pmod{7}$ oziroma $1985^{1985} \equiv 2 \pmod{7}$. Ostanek pri deljenju je torej enak 2.

Primer 3. Dokaži, da je število $2^{24} - 4$ deljivo s 23.

Iz Fermatovega izreka pri $a = 2$, $p = 23$ dobimo kongruenco $2^{22} \equiv 1 \pmod{23}$, torej je število $2^{22} - 1$ deljivo s 23, naše število, ki je štirikratnik tega števila, pa prav tako.

Poskusite rešiti še naslednji dve nalogi.

Poišči ostanek pri deljenju števila $(12371^{56} + 34)^{28}$ s 111.

Dokaži, da je število $2^{1092 \cdot 1093} - 1$ deljivo s 1093^2 .

Dušan Pagon

NALOGA

PETKOVA PETRA

Petra je rojena v petek in je imela šele enajsti rojstni dan ponovno v petek. Lani (torej leta 1987) je na petek rodila sina Peterčka pa tudi sama je imela rojstni dan v petek. Le še vsak enkrat bosta v tem tisočletju lahko praznovala svoj rojstni dan v petek.

Koliko let ima Petra in v katerem letnem času je rojen Peterček?

Boris Lavrič