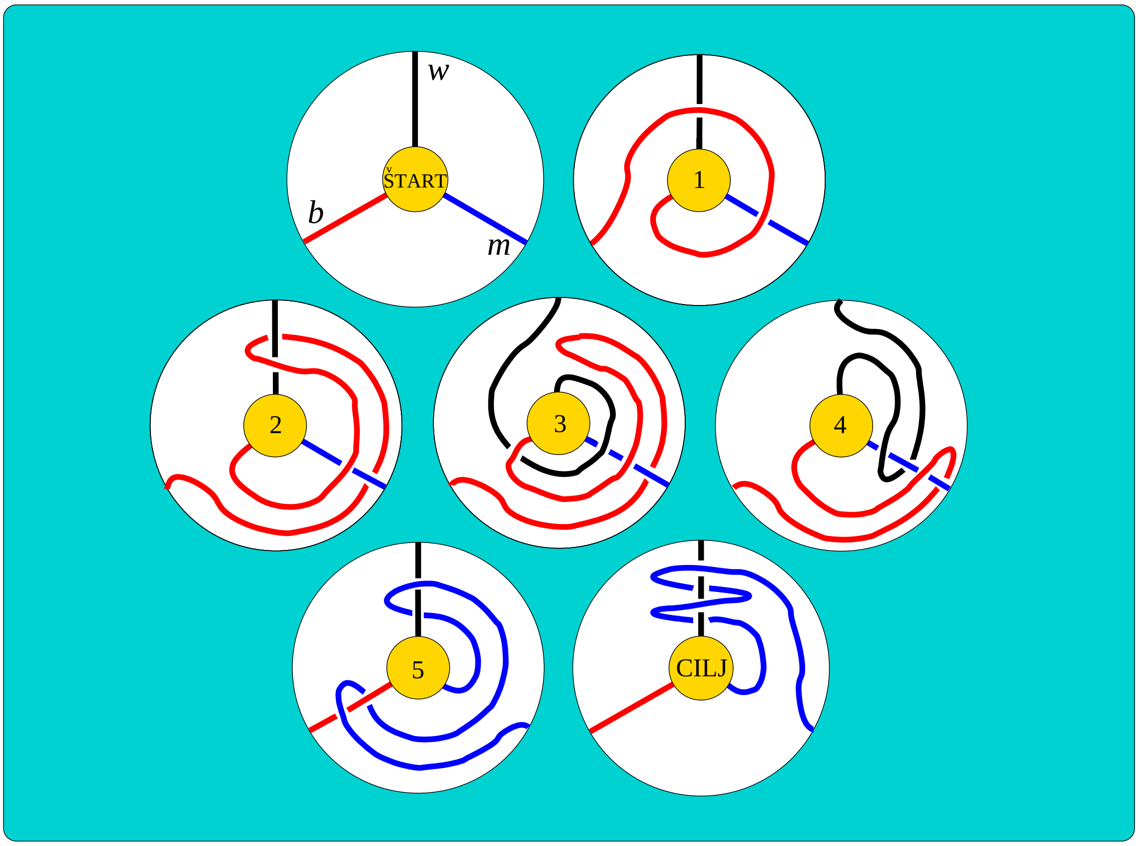
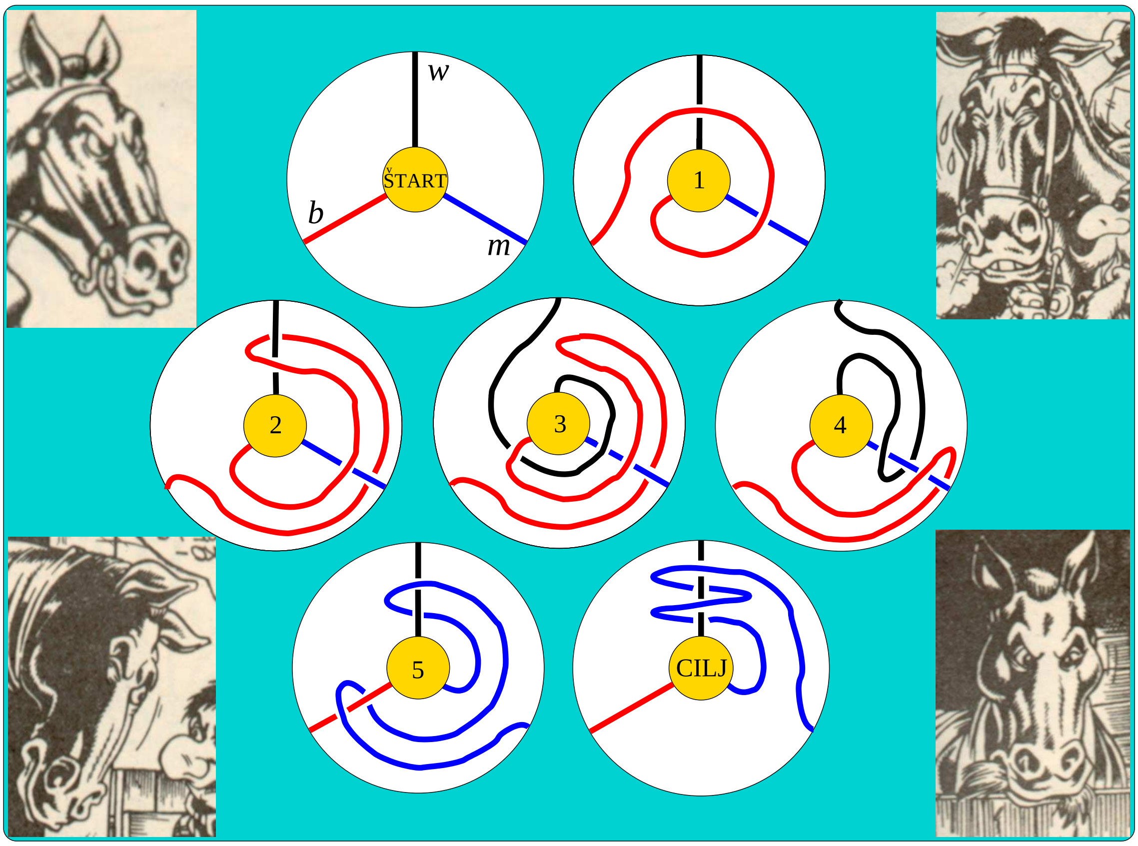

w
ŠTART
b
m
1
2
3
4
5
CILJ


w
ŠTART
b
m
1
2
3
4
5
CILJ

PROBLEM MERCEDESOVEGA VOZLA[1]

Aleksandar Jurišić

Math. Subj. Class. (2000): 57M25

Članek obravnava naslednji topološki problem. Na sredi (okrogle) sobe postavimo žogo in jo s tremi elastičnimi trakovi b, m in w povežemo s stenami. Ali je mogoče s premikanjem trakov (ne pa tudi njihovih koncev) naviti trak m enkrat okoli traku w, ne da bi pri tem premaknili žogo? Ta problem imenujemo "Problem Mercedesovega vozla" zaradi oblike, ki jo tvori žoga in trije trakovi.

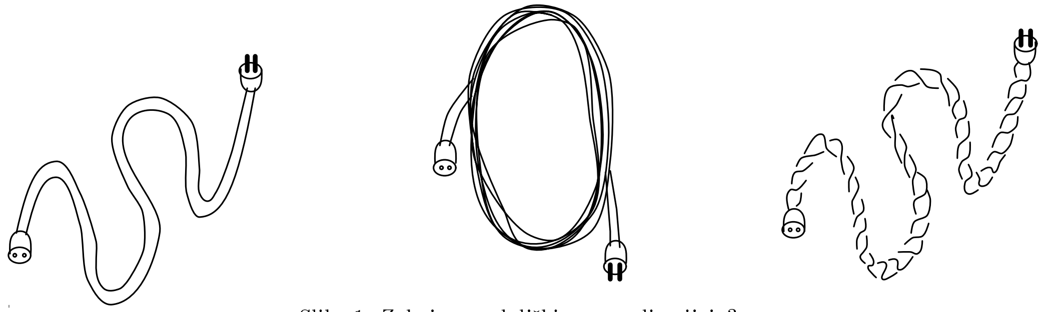
Predstavljen je enostaven način za dvakratno navitje (in zato tudi poljubno sodo navitje). Nazorna (negativna) rešitev začetnega problema je podana s pomočjo pojma sučnega števila.

THE MERCEDES KNOT PROBLEM

The paper is devoted to the following topological problem. Imagine a solid ball in the middle of a (round) room connected with three elastic bands b, m and w to the walls. Is it possible to move the elastic bands (but not their ends) in such a way that the band m becomes wrapped precisely once around the band w without moving the ball? The problem is called "the Mercedes knot problem" because of the shape formed by the ball and the three bands.

A simple way to wrap the bands twice (and, therefore, any even number of times) is shown. A transparent (negative) solution of the initial problem based on the notion of twisting number is presented.

1. UVOD. Gotovo ste že pospravljali dolgo žico (podaljšek) in jo navili okoli rame (npr. po sesanju sobe ali košnji trave z električno kosilnico)? Ko ste jo naslednjič zopet razvili, ste morda ugotovili, da je večkrat zvita (glej sliko 1).



Slika 1: Zakaj se podaljški ponavadi zvijejo?

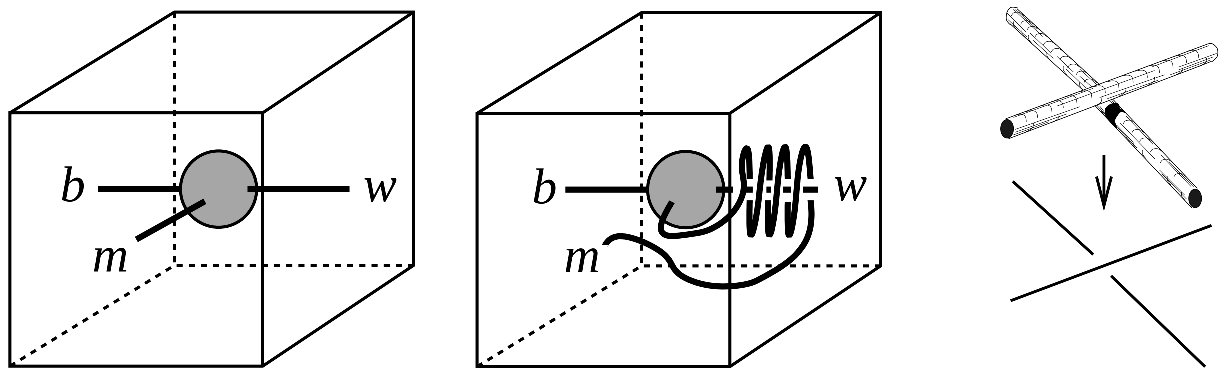
Naslednji matematični problem je tesno povezan s tem pojavom in zna pritegniti tudi nematematike. Na sredo sobe postavimo žogo in jo s tremi elastičnimi trakovi b, m in w poveženo s stenami. Z izjemo koncev, ki so fiksni, lahko trakove premikamo po sobi in jih raztegujemo

[1]Op. urednika: Članek je prevod članka [Ju], ki je bil leta 1999 nagrajen z Hassejevo nagrado. Glej `http://www.maa.org/awards/awards_mf99.html#hasse`. Le to vsako drugo leto podeljuje *Mathematical Association of America* (MAA) kot priznanje avtorju uglednega članka, ki je objavljen v eni od publikacij MAA in ki je namenjen širšemu krogu bralcev. V uradni obrazložitvi nagrajenega dela lahko preberemo:

Očarljiv članek Aleksandra Jurišića se prične z vprašanjem, zakaj se podaljški vedno zvijajo. To nas privede do vprašanja o navijanju elastik, pritrjenih na tri stene sobe in na žogo na sredi te sobe. Ta problem je v članku obravnavan s številnih zornih kotov, ki nas pripeljejo do globoke in zanimive matematike. Na tej poti spoznamo povezave s teorijo vozlov, Paulijevo uporabo spinorjev za modeliranje elektronov, igro Piet Heina, teorijo kit in naprave za zvijanje električnih žic. Članek sprejme za cilj Hilbertov nasvet, ki pravi: "Umetnost ustvarjanja matematike je v tem, da poiščemo tisti posebni primer, ki vsebuje vse zametke splošnosti" in ga nadvse uspešno realizira.

"Problem mercedesovega vozla" pritegne bralca k resni matematiki z uporabo privlačnega vizualnega problema. Trud, vložen v skrbno branje bo povrnjen tako študentom, ki jih zanima področje teorije vozlov in številne njene povezave, kakor tudi tistim, ki se prizadevajo za učinkovito matematično razlago.

po mili volji, ne da bi se strgali. Vprašanje je, *ali je mogoče s premikanjem trakov po sobi naviti trak m nekajkrat okoli traku w, ne da bi pri tem premaknili žogo* (glej sliko 2(a)).



začetek konec

(a) (b)

Slika 2

Gre za geometrijski problem, ki sodi nekje med topologijo in teorijo vozlov, toda naša rešitev bo zasnovana predvsem na enostavni kombinatoriki.

Najprej bomo podali delno rešitev, nato prevedli problem v matematični jezik in omenili nekaj zgodovinskega ozadja. V četrtem razdelku se bomo s pomočjo teorije vozlov približali bistvu problema z obravnavo nekaterih enostavnejših primerov, nato pa sledi celotna rešitev. Na naši poti bomo spoznali nekatere zanimive povezave in na koncu omenili še nekaj možnosti za uporabo. Na svoj račun bodo prišli tudi reševalci ugank. Za naše vodilo je morda primeren Hilbertov citat:

„ Umetnost ustvarjanja matematike je v tem, da poiščemo tisti posebni primer, ki vsebuje vse zametke splošnosti."

2. DELNA REŠITEV. Naš problem je poln presenečenj, saj nas zna zavesti v napačno smer že na samem začetku. Pa poskusimo nekaj naivnih pristopov. Če bi dovolili vrtenje žoge, potem bi bil odgovor na zastavljeno vprašanje 'DA', tj. trak m bi lahko navili okoli traku w tolikokrat, kolikokrat bi želeli (že z vrtenjem žoge okoli osi, ki jo določata konca traku w), in tako problem sploh ne bi bil zanimiv. Do podobnega zaključka bi prišli tudi, če bi privzeli, da sta v sobi samo trakova w in m. (Zakaj?) Toda žoge ne smemo vrteti in v sobi so trije trakovi, tako zna biti odgovor na naše vprašanje prej 'NE' kot 'DA'.

Po drugi strani pa, če smo prepričani, da je odgovor pritrdilen, lahko morda privzamemo, da je želeni položaj možno doseči celo v primeru, ko trakov b in w sploh ne premikamo. To prepričanje lahko izvira iz dejstva, da sta trakova b in w na istem mestu v obeh primerih na sliki 2(a) ali pa da vrtenje žoge trakov b in w ne bi premaknilo (le zvilo). V primeru, če sta trakova b in w trdna in ju torej ne premikamo, je prostor, v katerem premikamo trak m poln svitek (torus), v topološkem jeziku bi rekli, je homeomorfen krožnice in odprtega diska. Toda v polnem svitku ni možno navijati traku m ne da bi premikali vsaj enega izmed njegovih koncev. Topologi bi rekli, da začetna in končna lega traku m ustrezata zaporedoma enoti in neenotskemu elementu fundamentalne grupe polnega svitka (glej npr. Neuwirth [Neu]). Iz slednjega razmisleka zaključimo, da je premikanje trakov b in w ključnega pomena za rešitev ali pa, da je odgovor 'NE'.

Presenetljivo je odgovor (DA ali NE) odvisen od tega, kolikokrat želimo naviti trak m okoli traku w. Začnimo preučevati obstoj. Izdelamo realni model in nepričakovano hitro ugotovimo, kako je mogoče naviti trak m dvakrat okoli traku w. Glej naslovnico (začetek in konec), ki pojasni tudi naslov tega članka. V teoriji vozlov je navada, da raje rišemo diagrame. Pravzaprav gre za projekcije (glej sliko 2(b), ki ponazarja, kaj se zgodi pri križanju), te vsebujejo vse potrebne informacije za gradnjo trirazsežnih objektov, ki jih opisujejo. Obravnava ne izgubi na splošnosti, če nadomestimo kocko/sobo s kroglo. Radovednega bralca vabimo, da se poigra s svojim modelom, preden preveri našo rešitev na naslovnici. Bralcu obljubimo tudi, da bo ob koncu članka bolje razumel našo rešitev.

Ni se težko prepričati, da lahko že naviti del traku premaknemo v bližino ene od sfer in nato znova ponovimo postopek z naslovnice. Na ta način lahko navijemo trak m okoli traku w sodo krat. Problem pa je precej težji, če želimo naviti trak m okoli traku w za liho krat.

3. MODELIRANJE IN ZGODOVINA PROBLEMA. Čas je, da prevedemo naš problem v matematični jezik. Ker opisujemo geometrijski problem, bomo potrebovali nekaj topološke terminologije (čeprav naša rešitev ne bo temeljila zgolj na topologiji). Torej sledimo topologom, ki raje govorijo o deformaciji prostora, ki jo imenujejo *ambientna izotopija*, namesto o pomiku objektov v njej. Za boljše razumevanje si predstavljajmo sobo, napolnjeno z medom (ali kakšno drugo lepljivo snovjo). Potem premikanje elastičnih trakov povzroča deformacijo medu. Po drugi strani pa deformacija medu premika elastične trakove. Torej se običajno sprašujemo, ali obstaja ambientna izotopija, ki premakne objekte iz enega položaja v drugega.

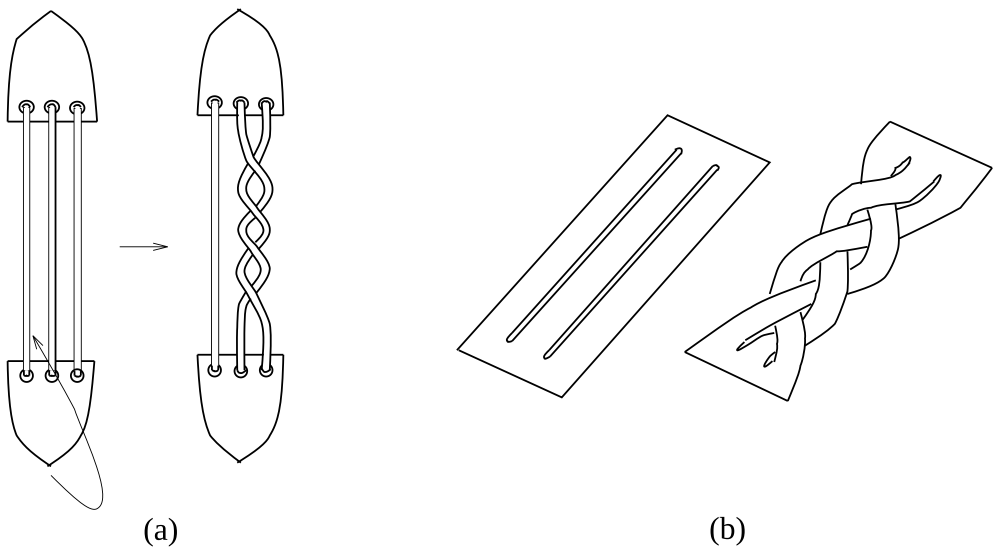
Naj bosta S_1 in S_2 dvorazsežni sferi s središčema v izhodišču prostora $\mathbb{R}^3$ in zaporedoma z radijema ena in dva. Naj bo H prostor med sferama S_1 in S_2 (tj. votla krogla $S^2 \times [1,2]$) in naj bodo b, m, w zaporedoma odseki, v katerih H seka pozitivne koordinatne osi x, y, z. V pogovoru z Johnom Milnorjem je Jože Vrabec vprašal naslednje vprašanje:

Vprašanje 1. *Ali obstaja ambientna izotopija votle krogle H, ki fiksira sferi S_1 in S_2 in navije trak m dvakrat okoli traku w (glej naslovnico - začetek in konec)?*

Na koncu prejšnjega razdelka smo si ogledali grafično rešitev. Na predavanjih pri predmetu Topologija I (1985/86) je profesor Vrabec predstavil topološko rešitev Johna Milnorja, v kateri je iskana ambientna izotopija konstruirana s pomočjo netrivialnega elementa fundamentalne grupe $SO(3)$ ($\cong RP^3$). Glej Jurišić [Ju] ali Bredon [Br, str. 164-167]. Presenetljivo pa ne znamo ne naše grafične rešitve ne Milnorjeve prirediti še za odgovor o drugem delu problema.

Vprašanje 2. *Ali obstaja ambientna izotopija votle krogle H, ki fiksira sferi S_1 in S_2 in navije trak m enkrat okoli traku w?*

Obe vprašanji imata zanimivo zgodovino. Na primer E.D. Bolker [Bo] je pred dvajsetimi leti podal še eno topološko rešitev prvega vprašanja. Vseeno pa so se fiziki prvi zanimali za prvo vprašanje. Rešitev so uporabili za boljšo razlago kvantne narave elektronov. Leta 1925 je švicarski fizik W. Pauli pokazal (star komaj 25 let), da dva elektrona ne moreta biti na istem mestu in imeti enak spin. Iz njegovega modela sledi, da se mora elektron zavrteti za 4π, da se vrne v svoj začetni položaj. Leta 1928 je angleški fizik P.A.M. Dirac v svojem 26. letu opisal gibanje elektronov z enačbo, ki je združila *kvantno mehaniko* in *specialno teorijo relativnosti*. Da bi prepričal svoje študente, da je Paulijev model naraven, je vzel ključ (namesto naše žoge na sredi sobe), ga povezal s tremi vrvicami za stol in ga zavrtel za 4π, nato pa razpletel vrvice, ne da bi premaknil ključ oziroma stol. Več o analizi spinorjev in teoriji kotnih momentov (angl. angular momentum) lahko najdete v knjigi Biedenharna in Loucka [BL, Ch. 2]. V začetku tridesetih let prejšnjega stoletja je bila to tako vroča tema na inštitutu Nielsa Bohra, da so v povezavi z njo izumili celo nekaj igric. Danski poet, pisatelj in matematik Piet Hein je poimenoval svojo igro *tangloidi*. Igrali so jo več let po vsej Evropi. Glej Gardner [G1, str. 28].



Slika 3: Igra Tangloidi in uganka, ki jo že dolgo poznajo usnjarji, peki in taborniki.

Vsak izmed dveh igralcev drži v roki kos lesa s tremi luknjami, ki so povezane s tremi vezalkami (glej sliko 3(a)). Eden izmed igralcev zavrti svoj kos okoli katere koli osi za 4π, drugi pa skuša v čim krajšem času razplesti vezalke (seveda brez rotacije kosov lesa). Nato pa zamenjata vlogi. Zmaga tisti, ki v krajšem času razplete vezalke. (Zakaj je to dober model za prvo vprašanje?) Omenimo še eno uganko (glej Berlekamp, Conway in Guy [BCG] ali Gardner [G2, str. 101]), kjer ne da bi trgali in lepili, spletemo papir (namig: začnite plesti na enem koncu, hkrati pa razpletajte na drugem koncu). Ta trik je verjetno zelo star, tako da ga poznajo številni usnjarji, peki, taborniki in verjetno še marsikdo.

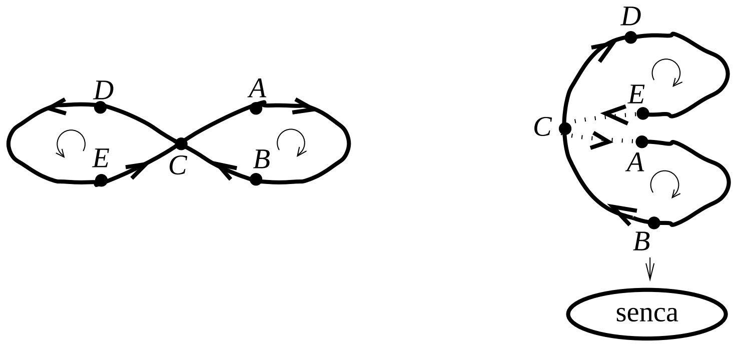
Drugo vprašanje pa se za razliko od prvega ne ukvarja s konstrukcijo, pač pa z *neobstojem* in je zato vsekakor v domeni matematike. Rešeno je bilo vsaj na dva načina (Newman [New] je uporabil Artinovo teorijo kit, prim. Fadell in Van Buskirk [FB], Fadell [Fa] pa konfiguracijske prostore).

Na prvi pogled izgleda, da je že vse rešeno in da ni več kaj dodati. Pa vendar ni očitne povezave med rešitvami prvega in drugega vprašanja. Še vedno se lahko vprašamo, zakaj grafična rešitev na naslovnici sploh deluje. (Njeno preverjanje spominja na vpreženega konja, ki vidi le predse.) Ali bi jo lahko bolje razumeli, ali pa našli naravnejšo rešitev in jo nato uporabili še za rešitev drugega vprašanja?[2]

Uporabimo svojo domišljijo (če že ne gre za obujanje spominov iz otroštva) in si predstavljajmo otroka, ki sedi za mizo v upanju, da bo z branjem debele knjige ustregel svojim staršem. Otrok kmalu postane utrujen in se prične igrati z modelom letala:

– letalo mora leteti naprej dlje časa (letala ne letijo nazaj, kajne!), medtem pa ga otrok želi držati čvrsto v roki, vendar pa se ne bi bilo modro premakniti s stola (parket namreč zelo škripa in starši bi opazili, da ne bere več),
– letalo tudi ni dobro obrniti na glavo, saj si je otrok zamislil, da je pilot potniškega letala in bi se lahko razjezili vsaj tisti potniki, ki ne uporabljajo varnostnih pasov.

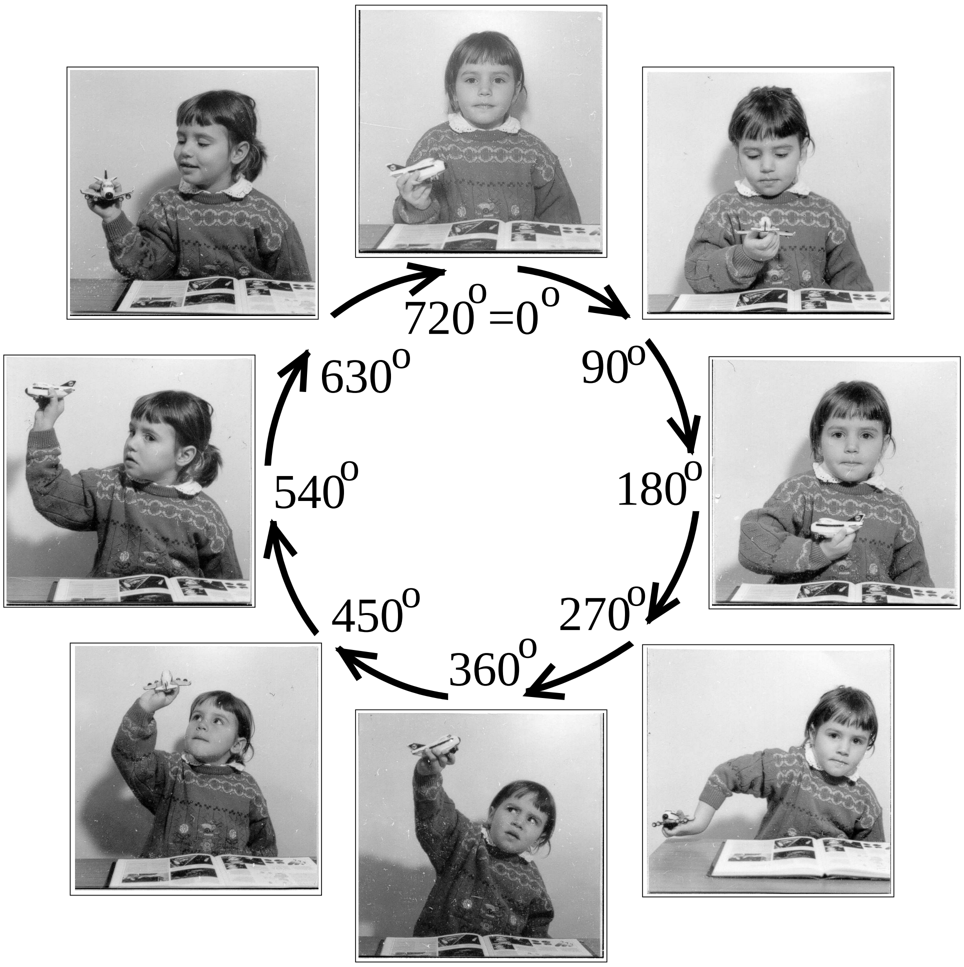
Kar naenkrat otrok ugotovi, da lahko leti po osmici (8). "**Neverjetno!!!**" pomisli otrok, "če bi letel po krožnici, bi se mi roka zapletla in bi se moral zaustaviti, osmica pa deluje." Ali bi lahko uporabili to "genialno" rešitev pri našem problemu? Prepognimo to osmico tako, da vidimo od zgoraj samo "krožnico" (matematiki bi rekli, da je takšna osmica krov nad krožnico, glej sliko 4).



Slika 4: Osmica nad krožnico.

Otroku ni težko leteti z letalom niti po prepognjeni osmici. Poskusimo sami, slika 5 nam zna pomagati (podobne slike lahko najdemo v številnih revijah in knjigah, npr. [Ri], [Str], [Br, str. 166]). Toda otrok sedaj leti po krožnici (v ta namen popolnoma prepognemo osmico), njegova roka pa se vrača v začetno stanje le po vsakem drugem krogu (vmes pa gre komolec okoli letala). Ni težko zmanjšati krožnice, dokler se letalo samo še vrti. Torej lahko otrok *nepretrgoma vrti letalo v isti smeri, medtem ko ga drži čvrsto v roki.* Pravzaprav lahko brez prestanka vrti celo svojo dlan, medtem ko je ves čas obrnjena navzgor. Ta fenomen bo vodilna ideja pri našem reševanju drugega vprašanja, pripomogla pa bo tudi k 'boljši' rešitvi prvega vprašanja. Ste presenečeni? Pomislite – če bi bilo letalo pri miru, mi pa bi še vedno izvajali iste gibe, bi bila roka večkrat zvita. Da bi bolje razumeli, kaj se dogaja med premikanjem elastičnih trakov, sledimo njihovemu zvijanju.

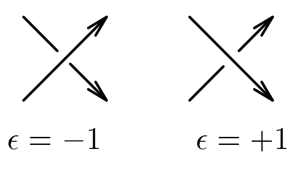
[2]V času reševanja avtor ni vedel, da je bilo drugo vprašanje že rešeno.



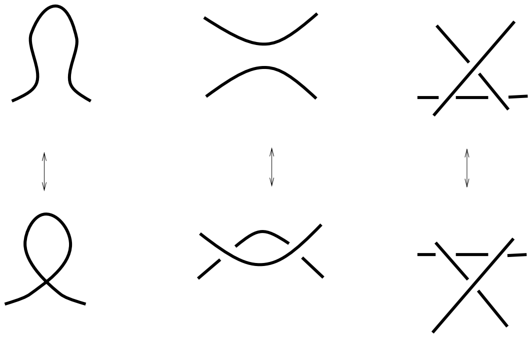
Slika 5: Eva Jurišić vrti letalo, medtem ko ga drži čvrsto v roki. Za podobno demonstracijo Uroša Jurišića glej `http://valjhun.fmf.uni-lj.si/~ajurisic/`.

4. SUČNO ŠTEVILO. Intervale b, m, w zamenjajmo z ozkimi trakovi. Tak pristop je danes precej običajen v teoriji vozlov, možne pa so tudi številne praktične uporabe. Na primer, ko preučujemo molekule DNK, ki so podobne dolgim ozkim (dvojnim) pramenom, običajno sledimo njihovemu zvijanju. Preden začnemo reševati drugo vprašanje v razširjeni obliki (s trakovi), si poglejmo nekaj poenostavitev (skromnost ni nikoli odveč). Roko, ki je držala letalo, lahko smatramo za trak. Poskusimo ugotoviti, kaj se zgodi z enim trakom v 3-razsežni krogli (lema 1) in kaj v votli krogli H (lema 2). Še pred tem pa vpeljimo eno izmed najenostavnejših invariant ambientne izotopije v teoriji vozlov. Gre za spletno število, ki ga definiramo za dve orientirani, sklenjeni krivulji v $\mathbb{R}^3$ (glej npr. Kauffman [K1] ali [K2]).

Vsakemu križišču v 2-razsežni projekciji danih krivulj priredimo "predznak", tako kot kaže slika 6. Potem je *spletno število* enako polovici vsote "predznakov" pri križiščih ene krivulje z drugo (predznaki križišč, pri katerih krivulja seka samo sebe, ne štejejo). V 19. stoletju, ko je bila teorija vozlov še v povojih, je Karl F. Gauss izračunal spletna števila sistema sklenjenih krožnih žic. Ker je spletno število invarianta ambientne izotopije, ni odvisno od izbrane 2-razsežne projekcije. Glej sliko 7.



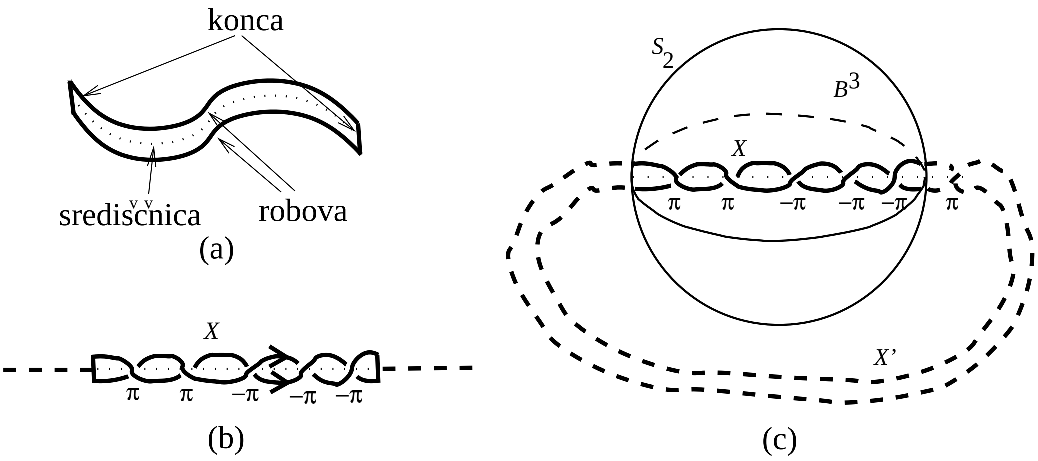
Slika 6: Pravilo desne roke/vijaka.



Slika 7: Reidemeister je pokazal, da je iz enega diagrama vozla moč narediti kateri koli drugi diagram istega vozla že samo s končnim zaporedjem zgornjih pomikov [Re]. Zato je število prirejeno diagramu vozla invariantno za ambientno izotopijo, kakor hitro se ohranja pri teh pomikih.

Slika 8: Spletno število je odigralo pomembno vlogo tudi pri preučevanju vpliva encimov na krožne DNK (tj. tiste, ki jih lahko predstavimo s sklenjenim trakom v $\mathbb{R}^3$, katerega rob ima dve komponenti). Glej Sumners [Su1] in Wang [Wa]. Leva slika kaže DNK brez encimskega postopka, desna pa z encimskim postopkom, ki je odpravil nekaj pentelj. Vložitev DNK v celično jedro je zelo kompleksna. De Witt Sumners [Su1] je zapisal: "Če povečamo celično jedro do velikosti košarkaške žoge, potem se pri tem DNK poveča do tankega ribiškega laksa, dolgega 200km."

Naj bo X ozek trak v 3-razsežnem podprostoru prostora $\mathbb{R}^3$, katerega središčnica (glej sliko 9(a)) leži vzdolž premice, oba konca traku ležita v ravnini, oba robova pa sta orientirana od leve proti desni (glej sliko 9(b)).

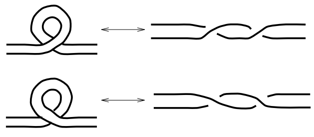


Slika 9

Če na enak način kot prej priredimo predznak vsakemu križišču enega robu traku X z drugim v 2-razsežni projekciji (na ravnino, ki vsebuje konca), potem je *sučno število* $\mathrm{Zv}(X)$ enako polovici vsote vseh predznakov. Glej sliko 9(b). Intuitivno je sučno število polovica razlike med številom zasukov za kot π in številom zasukov za kot $-\pi$.

Lahko bi se izognili 2-razsežni projekciji in podali Whitovo splošnejšo definicijo sučnega števila s pomočjo integrala, ki sešteva količino zvijanja vzdolž središnice traku. Glej Sumners

[Su2, str. 22], prim. Chinn in Steenrod [CS]. To pa še ne pomeni, da gre za invarianto ambientne izotopije. Če se nahajajo naši trakovi v $\mathbb{R}^3$ in so sklenjeni, potem lahko definiramo tudi *število pentelj* $\mathrm{Pe}(X)$ (angl. writhing number), tako da orientiramo središčnico in nato na enak način, kot v primeru spletnega števila, pridružimo vsakemu križišču središčnice same s seboj 'predznak', na koncu pa seštejemo vse predznake. Potem je vsota števila pentelj $\mathrm{Pe}(X)$ in sučnega števila $\mathrm{Zv}(X)$ enaka spletnemu številu $\mathrm{Sp}(X)$. To je *J.H. Whitov zakon ohranjanja*: $\mathrm{Sp}(X) = \mathrm{Pe}(X) + \mathrm{Zv}(X)$. Glej sliko 10.

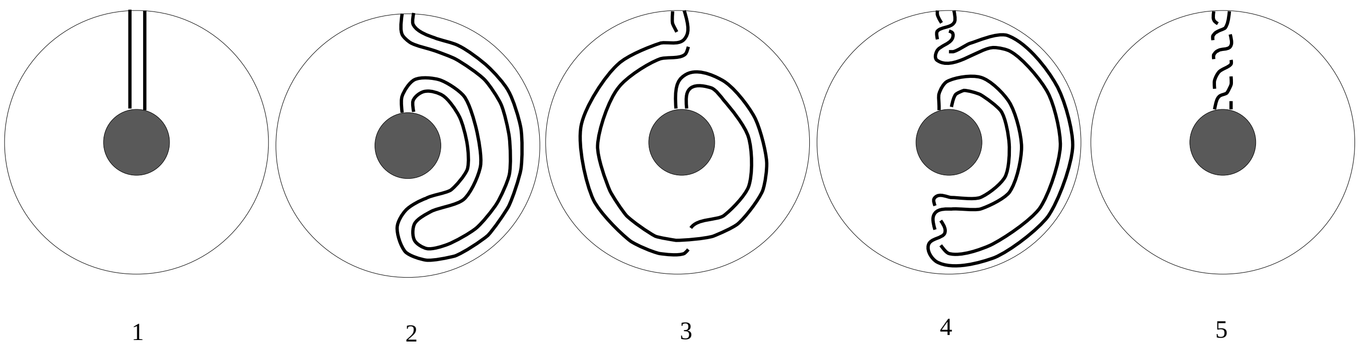


Slika 10: Ena pentlja je enaka enemu polnemu zasuku.

LEMA 1. *Naj bo B^3 krogla v $\mathbb{R}^3$, katere rob je sfera S_2. Če je X ozek trak, položen s središčnico vzdolž x-osi in z obema koncema na ekvatorju krogle B^3, potem se sučnega števila traku X ne da spremenit z ambientno izotopijo krogle B^3, ki fiksira sfero S_2.*

Dokaz. Konca traku X povežemo po zunanjosti krogle B^3 s trakom X' tako, da ima rob dobljenega sklenjenega traku $X \cup X'$ dve komponenti. Glej sliko 9(c). Vsako ambientno izotopijo krogle B^3, ki fiksira sfero S_2, lahko razširimo z identiteto na komplement krogle B^3 v prostoru $\mathbb{R}^3$. Če bi ambientna izotopija krogle B^3 spremenila sučno število traku X, potem bi tako razširjena ambientna izotopija prostora $\mathbb{R}^3$ spremenila spletno število roba unije $X \cup X'$, vendar pa to ni možno, ker je spletno število invarianta ambientne izotopije. ∎

Zgoraj smo lahko videli, da je bilo za spremljanje sučnega števila traku v trirazsežni krogli dovolj slediti obema robovoma traku. V primeru votle krogle pa temu ni tako. Naj bo A ozek trak, ki povezuje sferi S_1 in S_2 v votli krogli H in je položen vzdolž z-osi, njegova konca pa ležita v ravnini xz. Potem obstaja ambientna izotopija votle krogle H, ki spremeni sučno število traku A za dve. To bi moralo biti očitno že iz otrokove igre z letalom, še bolj jasno pa se vidi s slike 11. Zadnji položaj lahko narišemo tudi na naslednji način (glej sliko 12).



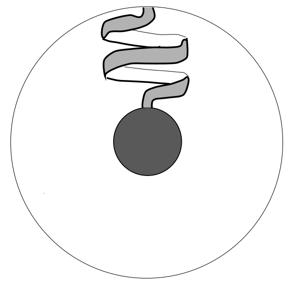
Slika 11: Iz drugega v tretji položaj pridemo tako, da zasukamo del traku, ki je bliže sferi S_2, na drugo stran po zgornji hemisferi. V naslednjem koraku pa zasukamo isti del traku še po spodnji hemisferi.

Prišli smo do jedra problema. Pomagati si moramo s kančkom topologije, da bi lahko neoporečno dokazali neobstoj. Vendar pa lahko zaradi naslednjih dveh trditev vseeno ostanemo zvesti tudi kombinatornemu pristopu.

(1) Ker je začetni položaj mogoče narisati z lomljenkami, je možno narisati poljuben položaj, do katerega pridemo z ambientno izotopijo, z lomljenkami že po majhni deformaciji.

(2) Če obstaja ambientna izotopija med dvema položajema, ki ju lahko narišemo z lomljenkami, potem obstaja tudi kosoma-linearna ambientna izotopija med tema položajema.

Glej Burde in Zieschang [BZ, str. 4 in Corollary 3.16].

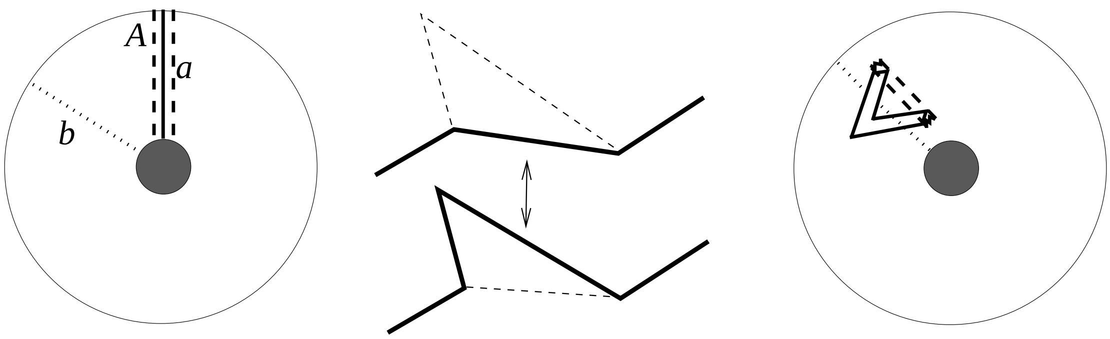


Slika 12

LEMA 2. *Ambientna izotopija votle sfere H, ki fiksira sferi S_1 in S_2, lahko spremeni sučno število traku A le za sodo število.*

Očitno ne obstaja ambientna izotopija votle krogle H, ki fiksira sferi S_1 in S_2 in spremeni sučno število traku A za eno polovico, saj sta tudi konca traku A fiksna. Preostane nam samo še dokaz, da sučnega števila ne moremo spremeniti za ena. Ta rezultat je implicitno in brez dokaza navedel že Kauffman [K1, VI.1, VI.18] (glej konec tega razdelka). Oglejmo si le skico dokaza.

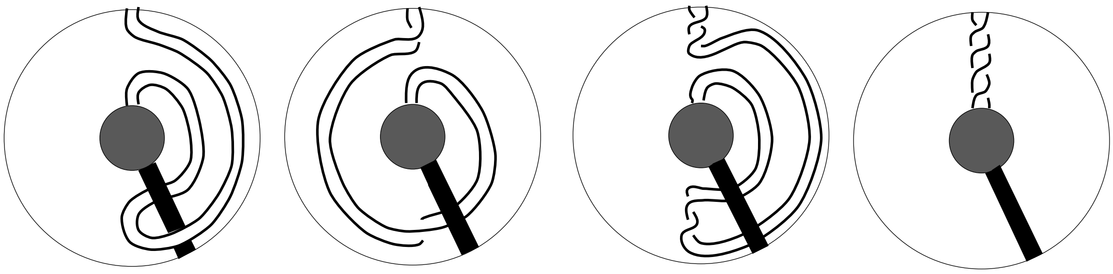
Dokaz. Z a in b označimo zaporedoma intervala od $(0,0,2)$ do $(0,0,1)$ in od $(2,0,0)$ do $(1,0,0)$ (glej sliko 13(a)). Torej je a središčnica traku A, za katero bomo privzeli, da se premika z ambientno izotopijo votle krogle H. Po drugi strani pa bomo na interval b gledali kot na žarek, ki se ne premika. Kot smo omenili že zgoraj, lahko privzamemo, da je ambientna izotopija kosoma-linearna. Glej Burde in Zieschang [BZ, Prop. 1.10]. Od tod sledi, da lahko inducirano gibanje intervala a izpeljemo s končnim številom Δ-pomikov (glej sliko 13(b)), hkrati pa dosežemo, da sta po vsakem pomiku trak A in žarek b disjunktna.



(a) (b) Δ−pomik (c)

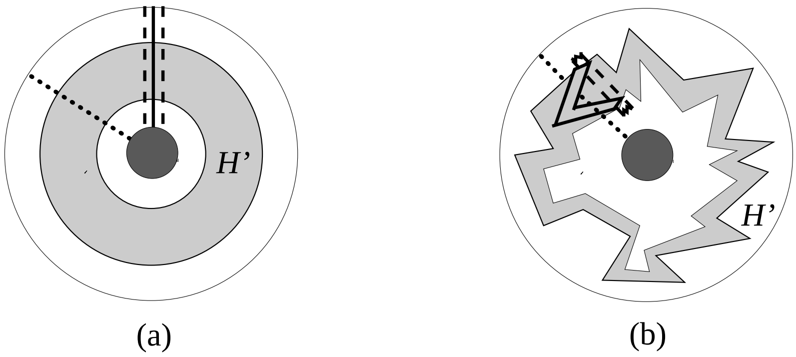
Slika 13

Velja poudariti, da, če trak A ne prečka žarka b, potem ostane sučno število nespremenjeno zaradi leme 1. Poglejmo si sedaj, kaj se zgodi, kadar gre pri Δ-pomiku trak A skozi žarek b. Pokazali bomo, da lahko premaknemo lomljenko a nazaj na isto mesto, kjer je bila pred tem Δ-pomikom, ne da bi pri tem prečkali žarek b, toda cena za to je, da se sučno število traku A spremeni za dve (glej sliko 14, ki smo jo dobili iz slike 11).



Slika 14

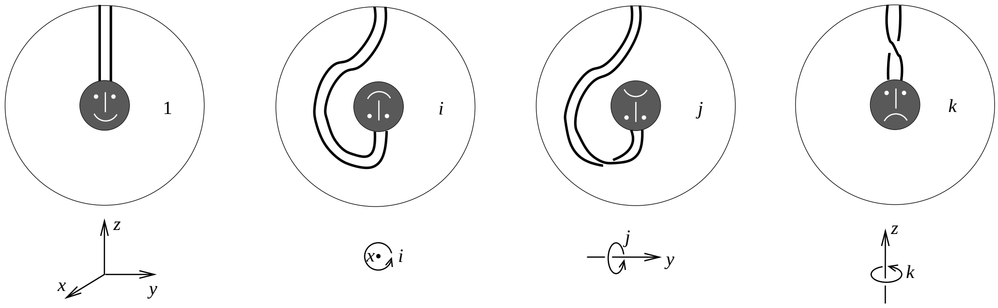
Sprva nismo prepričani, ali lahko izpeljemo 'potezo' s slike 14 v votli krogli H, saj bi se lahko zgodilo, da nam del nakopičenega traku A stoji na poti in se mu ne moremo izogniti (spomnimo se žoge v kateri je 200 km laksa). Pa vendar se lahko izvlečemo iz teh težav, saj ne potrebujemo celotne votle krogle H za to potezo. Del traku, ki se je premaknil pri Δ-pomiku, ko je šel trak A skozi žarek b, je na začetku ležal v notranjoti neke votle krogle $H' \subset H$ (glej sliko 15(a)). Predpostavimo, da se je tudi ta votla krogla H' deformirala z našo ambientno izotopijo (glej sliko 15(b)).



Slika 15: Dva ravninska preseka votle krogle.

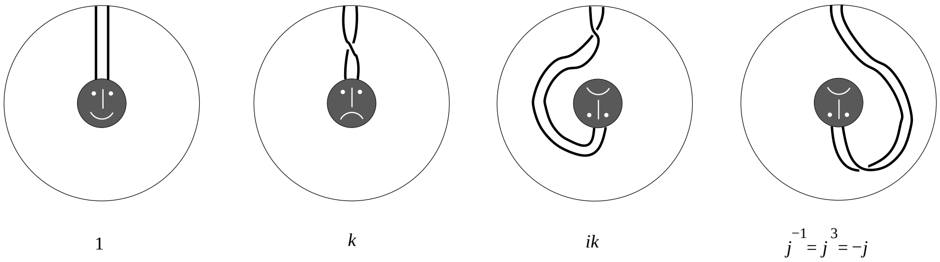
Toda ne glede na to kako se je premikala z ambientno izotopijo, ne vsebuje nobenega drugega dela traku A in izgleda kot votla krogla (tj. je homeomorfna votli krogli). Torej lahko sedaj uporabimo zvezdi podobno votlo kroglo H', da opravimo pomik s slike 14 v obratni smeri. Končno zaključimo, da se lahko sučno število traku A spremeni le za večkratnik števila 2. ∎

Bralec, ki se mu mudi prebrati rešitev na 2. vprašanje, lahko preide na naslednji razdelek, mi pa si oglejmo še eno zanimivo povezavo z grupo kvaternionov. Glej Kauffman [K1] in [K3]. Naj bodo i, j in k zaporedoma rotacije sfere S_1 okoli koordinatnih osi x, y in z za π radianov. Definirajmo grupo, ki je generirana z rotacijami i, j, k po modulu ekvivalenčne relacije $\sim$, ki jo inducira ambientna izotopija votle krogle H s trakom A, ki fiksira sferi S_1 in S_2. Glej sliko 16.



Slika 16: Za lažjo predstavo si na sprednjo stran narišemo vesel obraz, na hrbtno pa žalosten. Iz začetnega položaja "1" dobimo z rotacijo za π radianov zaporedoma položaje "i", "j" in "k".

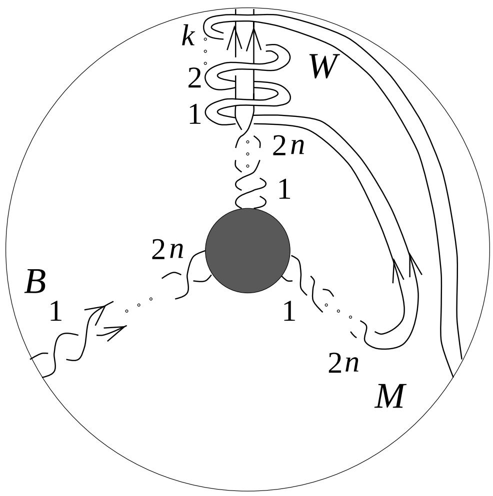
Potem je s slike 11 očitno, da velja $i^4 = j^4 = k^4 = 1$. Podobne slike zagotovijo tudi $i^2 = j^2 = k^2$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ in če označimo i^2 z minus ena, tj. (-1), potem tudi $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$. Slika 17 nas prepriča o veljavnosti zadnje enakosti. Torej smo dobili ravno grupo kvaternionov.



Slika 17: Na zadnjem koraku prestavimo samo trak.

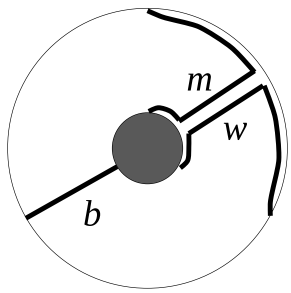
(Neobstoj iz leme 2 je izražen v Kauffmanovi knjigi [K1] kot $i^2 \neq 1$.)

5. REŠITEV. Sedaj smo pripravljeni, da z lemama 1 in 2 odgovorimo na 2. vprašanje. Naj bodo B, M in W nezviti trakovi v votli krogli H, ki smo jih postavili zaporedoma vzdolž intervalov b, m in w. Predpostavimo, da obstaja ambientna izotopija votle krogle H, ki fiksira sferi S_1 ter S_2, pri tem pa navije trak M k-krat okoli traku W, za nek $k \in \mathbb{Z}$. Če je širina trakov dovolj majhna, potem ta izotopija navije tudi trak M k-krat okoli traku W, tako da dobimo položaj, ki je prikazan na sliki 18. Če orientiramo robove trakov tako, kot kaže slika 18, potem je zaradi leme 2 sučno število traku B enako $2n$, za nek $n \in \mathbb{Z}$. Sedaj pa poglejmo trak, ki ga sestavlja unija $B \cup W$. Trakova B in W lahko povežemo z nezvitim trakom znotraj manjše krogle in tako dobimo en sam trak, ki ima oba konca na robu velike krogle. Potem nam lema 1 zagotavlja, da je sučno število traku W enako $-2n$. Podoben razmislek uporabimo še na uniji $B \cup M$: ker lahko zravnamo trak M (seveda tako, da ga pomaknemo skozi trak W), ne da bi pri tem naredili kakšen nov zasuk, zaključimo, da ima ravni del traku M $-2n$ zasukov. Po drugi strani pa pri obravnavi unije $M \cup W$ trak M ni dovoljeno premikati skozi W (ali skozi samega sebe ali skozi notranjost manjše krogle). Da bi zravnali trak M, moramo najprej sneti 'navoje' traku M s pomočjo k-kratne ponovitve pomika, ki ga opisuje slika 14 (seveda se premika trak M skozi trak B). Pomik središčnice traku M vzdolž ravne črte nam prinese $2k$ zasukov na traku M. Od tod zaključimo, da je sučno število traku M enako $-2n + 2k$. Toda po drugi strani nam lema 1 za unijo $M \cup W$ zagotavlja, da je to število enako $2n$. Torej je $k = 2n$. Zato ne obstaja ambientna izotopija votle krogle H, ki fiksira sferi S_1 in S_2 ter hkrati navije trak M liho krat okoli traku W.



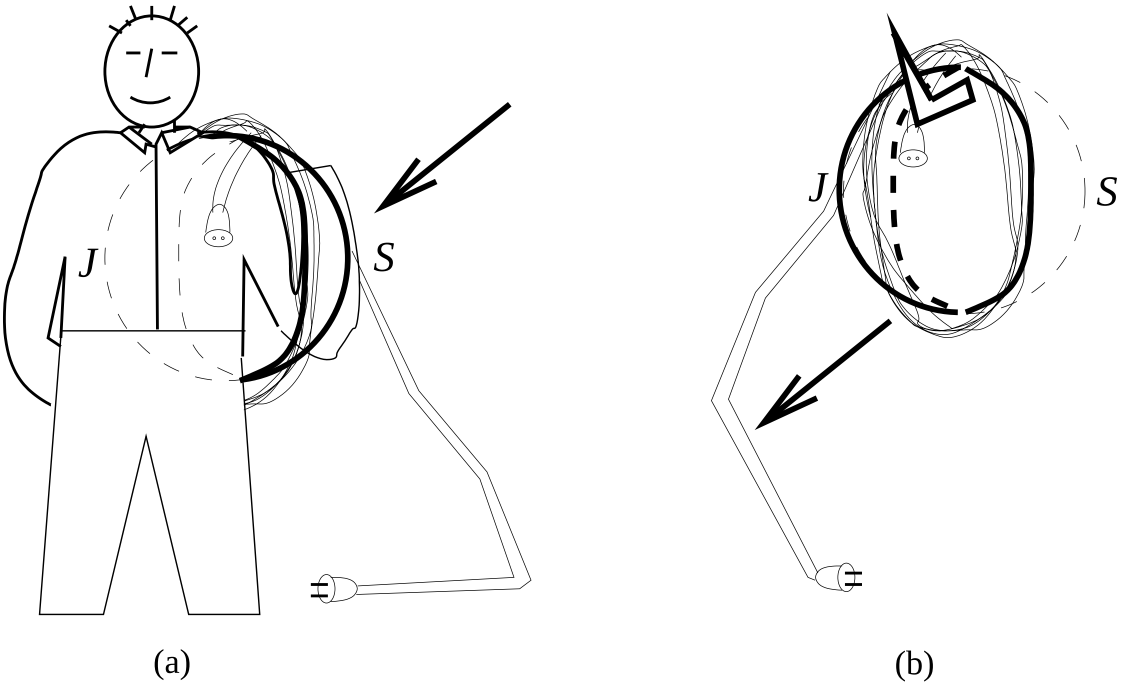
Slika 18

6. ZAKLJUČEK. Če uporabimo rešitev za drugo vprašanje na središčnici in stranicah traku A v votli krogli H, dobimo neobstoj iz leme 2. Torej lahko zaključimo, da je trditev, ki nam da odgovor na drugo vprašanje, ekvivalentna neobstoju iz leme 2. Sedaj pa bomo podali bolj naravno rešitev prvega vprašanja. Najprej lahko premaknemo elastike iz začetnega položaja na naslovnici v položaj na sliki 19. Nato ponovimo pomik s slike 11 na vzporednih delih trakov m in w in tako navijemo trak m dvakrat okoli traku w. Preostane nam le še, da 'razpletemo' trak b od 'vzporednih' delov trakov m in w (spomnimo se, da lahko vedno razpletemo dve elastiki, ki povezujeta sferi S_1 in S_2).



Slika 19

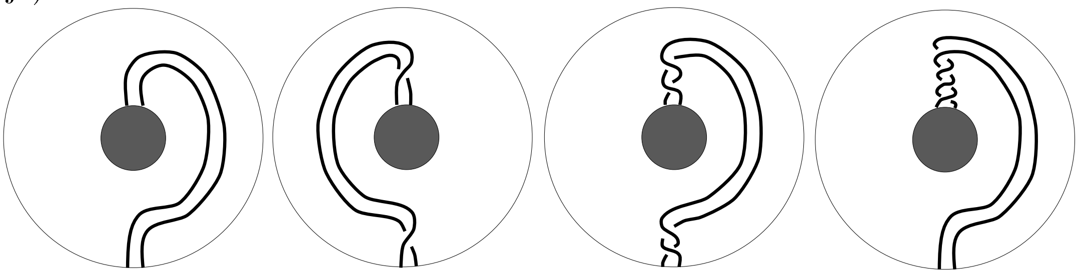
Končno pojasnimo še pojav, s katerim smo pričeli članek. Predpostavimo, da smo navili podaljšek na levo ramo.



Slika 20

Zamislimo si trirazsežno kroglo na mestu naše rame, pri čemer severni tečaj kaže v smeri naše leve roke. To pomeni, da navijamo podaljšek okoli ekvatorja iz smeri severnega tečaja (glej sliko 20(a)). Potem ko smo podaljšek za nekaj časa pospravili, se običajno ne spomnimo več, kje je severni tečaj in kje južni oziroma ali smo navijali iz smeri severnega oziroma južnega tečaja. V prvem primeru podaljšek ne bo zvit, medtem ko nam v drugem primeru (ko začnemo razvijati podaljšek direktno s klina, glej sliko 20(b)) slika 11 zagotavlja, da bo podaljšek večkrat zvit. Seveda mora biti pri tem eksperimentu podaljšek bodisi dovolj dolg bodisi moramo en konec pritrditi, medtem ko drugega držimo čvrsto v roki. 'Kosci', ki se zavedajo problema zvijanja, spravljajo podaljške tako, da jih navijejo v obliki osmice, primerjajte sliki 4 in 10, po drugi strani pa so v industriji dolgi podaljški običajno naviti na valj.

Omenimo še eno uporabo. Glej Stong [Sto]. Pomik na sliki 11 je moč razumeti še na en način. Slika 21 nam kaže, da, ko gre trak (ki ga postavimo v obliki vprašaja) enkrat okoli manjše sfere, pride trak zopet v svoj prvotni položaj, če se ob tem (ali pa na koncu kot kaže slika) manjša sfera zavrti za 4π radianov (v isto smer kot se je v bistvu vrtel trak v obliki vprašaja).

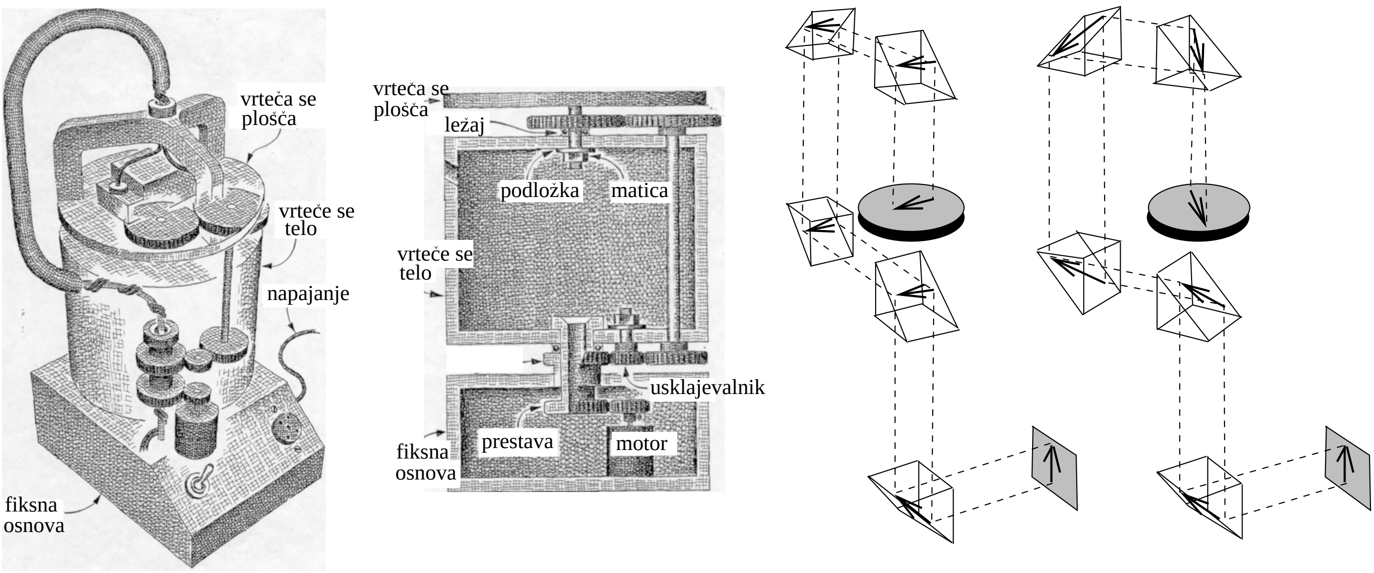


Slika 21

D. A. Adams [A] je uporabil to dejstvo zato, da je zgradil napravo, ki dovaja izmenično elektriko vrteči se plošči po prožnih žicah (tj. taki napravi, ki preprečuje, da bi se žici zapletli in prekinili). Obraten pristop je pogosto uporabljen v industriji, na primer za enakomerno zvijanje žice. Mnoge podobne, a verjetno enostavnejše, naprave so kasneje odkrili fiziki. Glej npr. Rieflin [Ri].

Diskretni pristop lahko razširimo še dalje. Predpostavimo, da želimo posneti ansambel na vrteči še platformi, hkrati pa ne želimo, da bi gledalec opazil vrtenje. Ali lahko najdete rešitev, pri kateri ne bo potrebno premikati kamere? (Namig: trak na sliki 21 nadomestite z nekaj prizmami.) Rešitev najdete na sliki 22(b). Podoben princip je uporabljen tudi pri *periskopu* (tj. napravi, s katero lahko opazovalec opazuje predmete, ki jih ne vidi direktno), pri tem pa lahko gledali naokoli ne bi bi premikal glavo. Glej Born in Wolf [BW, str. 243-244].

Za konec je tu še nekaj iztočnic za nadaljnje branje o teoriji vozlov [Re], [K1], [K2], [K3], [Br], [BZ], [Sti], o uporabi pri študiji DNK, [Su1], [Su2], [BCW] in o spletnem in sučnem številu [Wh], [CS], ter želja, da bi učitelji med branjem odkrili kaj koristnega, s čimer bodo lahko pritegnili študente, medtem ko bodo vpeljevali recimo kvaternione.



(a) (b)

Slika 22: (a) damsov prototip naprave za dovajanje izmenične elektrike vrteči se plošči. (b) Vlak prizm 'odvije' optični žarek.

Zahvala. Nekatere ideje za ta članek sem dobil med pogovori ali pa dopisovanjem z W. J. Gilbertom, F. Jaegerjem, U. Milutinovićem, R. C. Readom in J. Vrabcem. Zahvaljujem se tudi kolegom in kolegicam, ki so prebrali rokopis in mi svetovali številne izboljšave.

LITERATURA

[A] D. A. Adams, *Apparatus for Providing Energy Communication Between a moving and a Stationary Terminal*, U.S. Patent 3,586,413, June 22, 1971.

[BCW] W. R. Bauer, F. H. C. Crick and J. H. White, *Supercoiled DNA*, Scientific American (July) 1980, 100-113.

[BCG] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Academic Press, London - Toronto, 1982.

[BL] L. C. Biedenharn, J.D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics, Theory and Application.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[Bo] E. D. Bolker, *The spinor spanner*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 997.

[BW] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, Oxford, 4th ed., 1970.

[Br] G. E. Bredon, *Topology and Geometry.* Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1993.

[BZ] G. Burde, H. Zieschang, *Knots.* De Gruyter studies in mathematics 5, Berlin - New York, 1985.

[Fa] E. Fadell, *Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac*, Duke Math. J. **29** (1962), 231-242.

[CS] W. G. Chinn, N. Steenrod, *First concepts of topology*, MAA ,1966.

[FB] E. Fadell, J. van Buskirk, *The braid groups of E^2 and S^2*, Duke Math. J. **29** (1962), 243-257.

[G1] M. Gardner, *New Mathematical Diversions from Scientific American.* Simon and Schuster, New York, 1966.

[G2] M. Gardner, *Aha! Pa te imam.* DZS, Ljubljana, 1992.

[Ju] A. Jurišić, *The Mercedes Knot Problem*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 756-770.

[K1] L. H. Kauffman, *On Knots.* Annals of mathematics studies, Princeton University Press, 1987.

[K2] L. H. Kauffman, *New Invariants in the Theory of Knots*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), 195–242.

[K3] L. H. Kauffman, *Knots and Physics.* World Scientific Pub., Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, 1991.

[New] M. H. A. Newman, *On string problem of Dirac*, J. London Math. Soc. **17** (1942), 173-177.

[Neu] L. Neuwirth, *The Theory of Knots*, Scientific American (June) 1979. , 110-124.

[Re] K. Reidemeister, *Knotentheorie.* Chelsea Publ. Co., New York, 1948. Copyright 1932, Julius Springer, Berlin.

[Ri] E. Rieflin, *Some mechanisms related to Dirac's strings*, Amer. J. Physics **47** (1979), 379-381.

[Sto] C. L. Stong, *The Amateur Scientist* (Subtitle: *Diverse topics, starting with how to supply electric power to something that is turning*), Scientific American (December) 1975, 120-125,

[Sti] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1993.

[Str] J. Strnad, *Še o sukanju teles*, Presek **19** (1991/92), 320-321.

[Su1] D. W. Sumners, *Untangling DNA*, Math. Intelligencer **12** (1990), 71-80.

[Su2] D. L, Sumners (Ed.), *New Scientific Applications of Geometry and Topology*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **45**, AMS short course notes, 1992.

[Wa] J. C. Wang, *DNA Topoisomerases*, Scientific American **247** (July) 1982, 94-97,100-109,

[Wh] J. White, *Self-linking and Gauss integral in higher dimensions*, Amer. J. Math. **41** (1969), 693-728.