UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Štefko Miklavič

1-HOMOGENI GRAFI

disertacija

Ljubljana, 2004

Povzetek disertacije

Mentor: prof. dr. Aleksandar Jurišić

V disertaciji se bomo ukvarjali z vprašanjem, kdaj so razdaljno-regularni grafi 1-homogeni, kot tudi z nekaterimi variacijami oziroma posplošitvami tega vprašanja. V grobem je disertacija razdeljena na tri dele. Prvi del, ki ga tvorita drugo in tretje poglavje disertacije, je uvodni del. V njem bomo definirali razdaljno-regularne grafe in 1-homogene grafe, ter predstavili nekaj njihovih osnovnih lastnosti. Prav tako bomo opisali nekaj rezultatov o razdaljno-regularnih grafih ter 1-homogenih grafih, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju disertacije.

V drugem delu disertacije (četrto poglavje) bomo obravnavali razdaljno-regularne grafi brez trikotnikov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji. Pokazali bomo, da imajo razdaljno-regularni grafi s to lastnostjo nekatere dodatne kombinatorične lastnosti. V nekaterih primerih se izkaže, da zaradi teh dodatnih kombinatoričnih lastnosti lahko pokažemo, da so grafi 1-homogeni.

V tretjem delu disertacije pa se bomo ukvarjali s Q-polinomskimi razdaljno-regularnimi grafi. Tudi v tem primeru se izkaže, da imajo ti grafi dodatne kombinatorične lastnosti. Za nekatere izmed teh grafov bomo s pomočjo teh dodatnih kombinatoričnih lastnosti pokazali, da so bodosi 1-homogeni, bodisi so 1-homoghenim grafom na nek način zelo podobni. Izpeljali bomo tudi nekaj potrebnih pogojev za obstoj nekaterih Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov. Z njihovo pomočjo bomo dokazali, da določeni Q-polinomski razdaljno-regularni grafi ne morejo obstajati.

Math. Subj. Class (2000): 05C12, 05C25, 05C35, 05C50, 05E30.

KLJUČNE BESEDE: Razdaljno-regularni grafi, 1-homogeni grafi, asociativne sheme, ekvitabilne particije, Q-polinomski razdaljno-regularni grafi.

KEY WORDS: Distance-regular graphs, 1-homogeneous graphs, association schemes, equitable partitions, Q-polynomial distance-regular graphs.

Kazalo

Poglavje 1

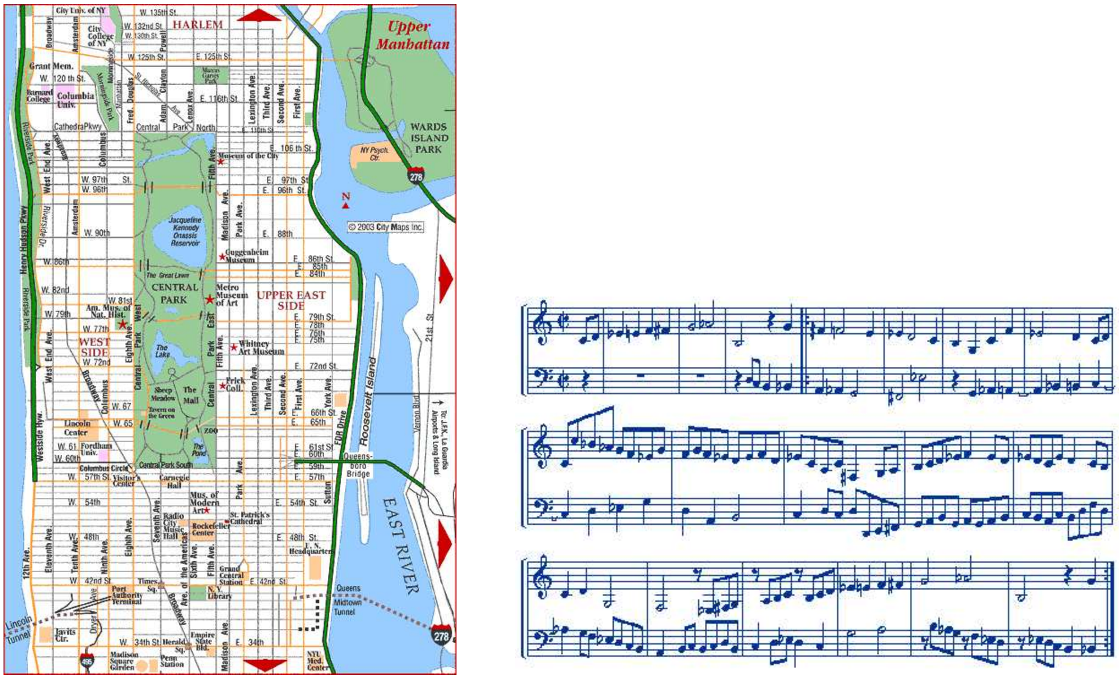
Uvod

Pojem grafa je po eni strani zelo splošen, po drugi strani pa zelo priročen. Priročen zato, ker ga matematično (pa tudi intuitivno) zelo enostavno formuliramo s pomočjo simetričnih relacij v neki množici. Prav zaradi tega pa je tudi zelo splošen - v množici namreč obstaja zelo veliko simetričnih relacij. Seveda bi bilo zaradi tega zelo naivno pričakovati kakršnokoli uporabno klasifikacijo vseh končnih grafov.

Vprašanje klasifikacije pa postane bolj zanimivo in ne več tako brezupno v primeru, ko študiramo grafe, ki imajo določeno stopnjo regularnosti ali simetrije. Medtem ko simetrija grafa ni nič drugega kot avtomorfizem grafa, pa je regularnost grafa definirana povsem numerično. Zaradi tega ima dovolj velika stopnja simetrije grafa vedno za posledico določeno regularnost grafa, obratno pa ni nujno res. Naprimer, vsak po vozliščih tranzitiven graf je tudi regularen, medtem ko obratno ne velja vedno. Podobno je vsak razdaljno-tranzitiven graf tudi razdaljno-regularen, obratno pa tudi v tem primeru ni nujno res.

Študij regularnosti in simetrije v matematiki ni nov. Platonska telesa (katerih ogrodja so regularni grafi) so proučevali že v antiki. Regularni grafi so bili deležni intenzivnega proučevanja. Poznamo kar nekaj lepih rezultatov, ki veljajo za regularne grafe, za splošne grafe pa ne. Raziskovanje simetrij matematičnih objektov prav tako že od nekdaj buri domišljijo matematikov. Pojma regularnosti in simetričnosti pa nista znana samo v matematiki. Poznajo jih tudi v drugih znanostih, kot na primer v fiziki in kemiji. Tudi v umetnosti sta bili regularnost in simetrija upodobljeni na mnogo načinov. V arhitekturi se to odraža v simetriji raznih stavb, v urbanizmu pa lahko v zasnovi naselij naletimo tako na regularnost kot na simetrijo. Tudi v slikarskih delih, med katerimi verjetno najbolj izstopajo dela M. C. Escherja, imamo mnogo primerov, v katerih lahko občudujemo nešteto načinov upodobitve teh dveh pojmov. Na regularnost in simetrijo pa naletimo tudi v glasbi. Verjetno so najbolj znani primeri Bachovi kanoni iz njegovega ciklusa *Musical Offering*. Pojma regularnosti in simetrije pa nenazadnje segata tudi preko znanosti in umetnosti, saj na razne oblike le-teh naletimo skoraj na vseh področjih.

Povezan končen graf Γ brez zank in večkratnih povezav je razdaljno-regularen, če je razdaljna particija glede na poljubno vozlišče x grafa Γ ekvitabilna, parametri te

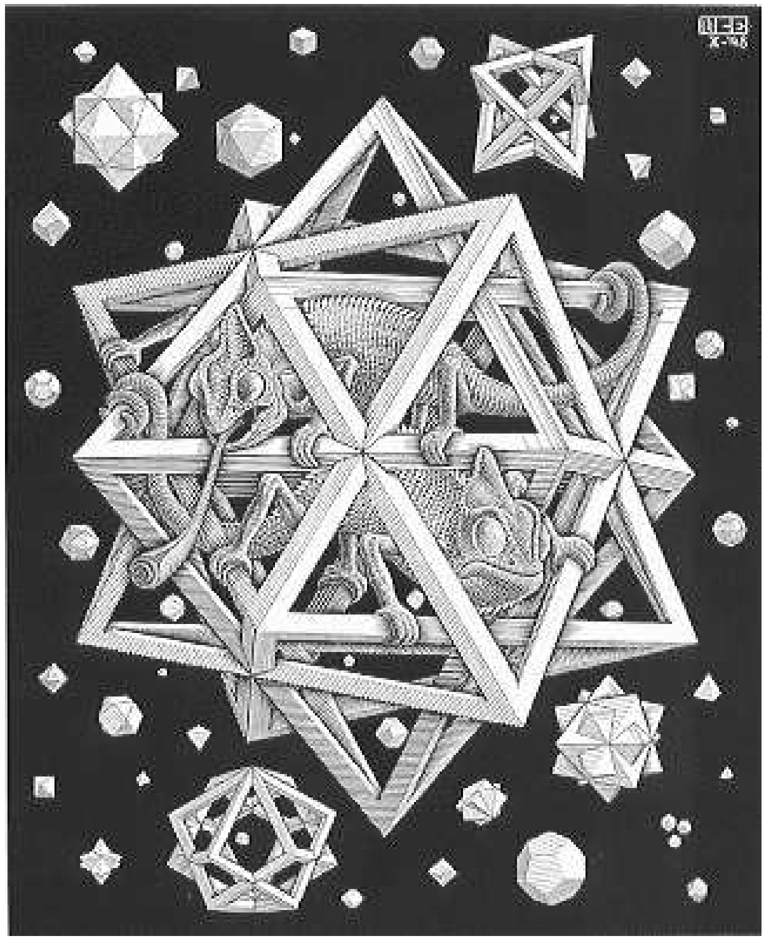


Slika 1.1: Na levi: skoraj vsa križišča Zgornjega Manhattana so "stopnje" 4. Na desni: notni zapis Bachovega kanona *Canon a 2 Quaerendo invenietis* iz ciklusa *Musical Offerings*.

particije pa niso odvisni od izbire vozlišča x. Razdaljno-regularni grafi so povezani z veliko področji matematike: teorijo grafov, teorijo načrtov, teorijo kodiranja, geometrijo, pa tudi algebro ter topologijo. Pravzaprav je večina končnih matematičnih objektov, ki imajo dovolj veliko stopnjo regularnosti, tako ali drugače povezana z razdaljno-regularnimi grafi.

Na zelo podoben način lahko s pomočjo ekvitabilnih particij definiramo tudi 1-homogene grafe. Povezan končen graf Γ je 1-homogen, če je razdaljna particija glede na poljuben par sosednjih vozlišč x in y grafa Γ ekvitabilna, parametri te particije pa niso odvisni od izbire sosednjih vozlišč x in y. 1-homogenost je strožji pogoj kot razdaljna-regularnost. Hitro se da namreč prepričati, da so vsi 1-homogeni grafi tudi razdaljno-regularni (glej izrek 3.2.4). Kadar proučujemo dodatne kombinatorične lastnosti razdaljno-regularnih grafov, se je zato dobro najprej vprašati, ali so ti grafi 1-homogeni? To bo tudi osrednje vprašanje te disertacije. Seveda pa imajo lahko tudi razdaljno-regularni grafi, ki niso 1-homogeni, prav tako kakšne zanimive kombinatorične lastnosti.

Pri študiju razdaljno-regularnih grafov pride bolj kot pri splošnih grafih do izraza uporaba različnih algebraičnih orodij in metod. Razlog za to tiči v dejstvu, da je vektorski prostor, ki ga napenjajo razdaljne matrike razdaljno-regularnega grafa, tudi algebra - tako imenovana Bose-Mesnerjeva algebra razdaljno-regularnega grafa. Zaradi tega se razne algebraične lastnosti Bose-Mesnerjeve algebre odražajo kot določene kombinatorične lastnosti oziroma regularnosti v samem grafu.

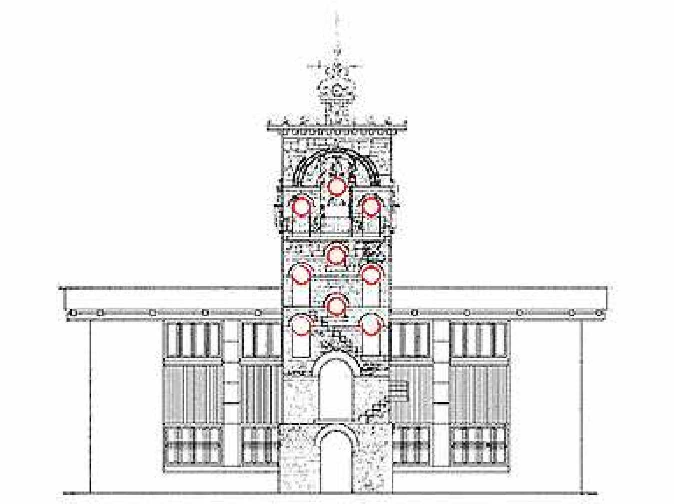


Slika 1.2: Delo nizozemskega umetnika M. C. Escherja (1898-1972) *Stars*. Osrednja figura prikazuje presek treh oktaedrov. Poleg tega lahko na sliki najdemo še nekatere zanimive objekte: presek kocke in oktaedra (zgoraj levo), presek dveh tetraedrov (objekt znan tudi po imenu *Stella octangula* - zgoraj desno), presek dveh kock (spodaj levo), ter še mnoge druge. (M.C. Escher's "Stars" (c) 2004 The M.C. Escher Company - the Netherlands. All rights reserved. Used by permission.)

V disertaciji bomo obravnavali dva primera, ko imajo čisto algebraične lastnosti Bose-Mesnerjeve algebre za posledico kombinatorične lastnosti grafa samega. V prvem primeru bomo obravnavali razdaljno-regularne grafe, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. Če privzamemo še, da so ti grafi brez trikotnikov, potem lahko dokažemo nekaj zelo lepih kombinatoričnih lastnosti takih grafov ter v nekaterih primerih celo 1-homogenost. S pomočjo teh lastnosti lahko klasificiramo nekatere poddružine teh grafov. Rezultati tega poglavja so povzeti po člankih [23] in [24], ki so skupno delo z A. Jurišićem in J. Koolenom.

V drugem primeru pa bomo obravnavali Q-polinomske razdaljno-regularne grafe.

Kot bomo videli, je njihova definicija povsem algebraična. Pravzaprav je ena od velikih nalog teorije razdaljno-regularnih grafov prav kombinatorična karakterizacija ter klasifikacija Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov. Kot v prvem primeru, bomo za nekatere Q-polinomske razdaljno-regularne grafe pokazali, da premorejo dodatne kombinatorične lastnosti. Spet bomo za nekatere izmed teh grafov pokazali, da so 1-homogeni.



Slika 1.3: Na levi: skica Plečnikove cerkve sv. Mihaela na Barju. Na desni: satovje nas spominja na regularen graf stopnje 3.

Kot bomo videli, je zelo priročno, če za množico vozlišč razdaljno-regularnega grafa Γ vzamemo kar standardno ortonormirano bazo evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, kjer je n število vozlišč grafa Γ. V tem primeru lahko vsako vozlišče s pomočjo matrik Bose-Mesnerjeve algebre grafa Γ preslikamo v nek vektor prostora $\mathbb{R}^n$. Če to storimo z matrikami, ki jim pravimo *glavni idempotenti* grafa Γ, potem je skalarni produkt dveh takih vektorjev odvisen samo od razdalje med ustreznima vozliščema grafa Γ. To zelo pomembno dejstvo bo v disertaciji igralo osrednjo vlogo. Tako dobljene vektorje, ki imajo vsi enako normo ter so poleg tega še lastni vektorji matrike sosednosti grafa Γ, imenujemo *reprezentacija* vozlišč grafa Γ.

Spregovorimo še nekaj besed o zgradbi disertacije. V drugem poglavju bomo bolj podrobno spregovorili o osnovah razdaljno-regularnih grafov. Najprej bomo predstavili asociativne sheme (ki so posplošitev razdaljno-regularnih grafov), nato pa vpeljali razdaljno-regularne grafe. Podali bomo nekaj osnovnih zgledov ter lastnosti in rezultatov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. V tretjem poglavju bomo definirali ekvitabilne particije in 1-homogene grafe. Četrto poglavje bo namenjeno razdaljno-regularnim grafom brez trikotnikov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. S pomočjo te povsem algebraične lastnosti bomo pokazali, da ti grafi premorejo dodatne kombinatorične lastnosti, in so zato v nekaterih primerih 1-homogeni. Te dodatne kombinatorične lastnosti bomo uporabili tudi za klasifikacijo nekaterih razredov teh grafov. V petem poglavju bomo študirali Q-polinomske razdaljno-regularne grafe. Tudi v tem primeru bomo za nekaj podrazredov teh grafov pokazali, da premorejo dodatne kombinatorične lastnosti. Za nekatere bomo pokazali, da so 1-homogeni, za druge pa bomo s pomočjo teh dodatnih kombinatoričnih lastnosti izpeljali določene potrebne pogoje za njihov obstoj. Navedli bomo tudi primer, kako lahko s temi potrebnimi pogoji dokažemo neobstoj nekaterih razdaljno-regularnih grafov. V šestem poglavju bomo predstavili konstrukcijo antipodnih razdaljno-regularnih grafov indeksa 2 in premera 4. Konstrukcijo sta prva opisala Martin in Munemasa [32]. Podali bomo neodvisen dokaz, kdaj so konstruirani grafi res razdaljno-regularni, ter njuno konstrukcijo posplošili na konstrukcijo antipodnih razdaljno-regularnih grafov indeksa 2 in premera 3 oziroma 5. Naš dokaz bo narejen s pomočjo ekvitabilnih particij konstruiranih grafov, ki so podobne kot v primeru 1-homogenih grafov. Rezultati tega poglavja so skupno delo z A. Jurišićem.

Drugo in tretje poglavje sta uvodni poglavji. Bralec s potrebnim predznanjem o razdaljno-regularnih grafih ter o 1-homogenih grafih ju lahko preskoči, ter po potrebi v teh dveh poglavjih pomoč poišče kasneje. Četrto, peto in šesto poglavje pa so med seboj neodvisna, zato se jih lahko bere v poljubnem vrstnem redu.

Poglavje 2

Splošno o razdaljno-regularnih grafih

Objekti, s katerimi se bomo v tej disertaciji največ ukvarjali, so razdaljno-regularni grafi. V kombinatoriki se razdaljno-regularni grafi pojavijo kot naravna posplošitev regularnih grafov, ki so ekstremni glede na nekatere lastnosti, oziroma glede na nekatere neenakosti, ki za njih veljajo. Poleg tega so povezani z mnogimi kombinatoričnimi strukturami, kot so semi-simetrični načrti , simetrične mreže, Hadamardove matrike (glej naprimer Drake [15]) in diferenčne množice (glej Chen in Li [10]), če naštejemo le nekatere. Nenazadnje pa so razdaljno-regularni grafi povezani tudi z drugimi področji matematike. Naprimer s teorijo kodiranja (Delsarte [13]), končnimi geometrijami, preko le-teh s kriptografijo in preko asociativnih shem s statistiko. Mnogi rezultati in problemi iz teorije kodiranja imajo zelo naravno posplošitev v teoriji razdaljno-regularnih grafov. Preko Bose-Mesnerjeve algebre so razdaljno-regularni grafi povezani z algebro, preko krovnih in kvocientnih grafov pa tudi s topologijo.

V tem poglavju disertacije bomo razdaljno-regularne grafe definirali, opisali njihove glavne lastnosti in navedli nekaj osnovnih izrekov iz teorije razdaljno-regularnih grafov, ki jih bomo potrebovali kasneje. Naj na začetku navedemo dve knjigi, kjer se zahtevnejši bralec lahko še dodatno poduči o razdaljno-regularnih grafih. A. E. Brouwer, A. M. Cohen in A. Neumaier so avtorji knjige *Distance-Regular Graphs* [4]. Knjiga je odličen pregled več ali manj celotne teorije razdaljno-regularnih grafov do njenega izida. Druga knjiga pa predstavlja odličen uvod tako v teorijo razdaljno-regularnih grafov, kot v širše področje algebraične kombinatorike. Avtor knjige je C. D. Godsil, naslov pa *Algebraic Combinatorics* [17].

Razdaljno-regularni grafi so poddružina kombinatoričnih objektov, ki jih imenujemo asociativne sheme. Zato je prav, da v prvem razdelku na kratko spregovorimo o njih. V raziskovanju asociativnih shem dostikrat uporabljamo različne algebraične metode in pristope. Razlog za to tiči v dejstvu, da vsaki asociativni shemi pripada tako imenovana *Bose-Mesnerjeva* algebra. Zato bomo v drugem razdelku Bose-

Mesnerjevo algebro asociativne sheme opisali in podali dve njeni bazi. V tretjem razdelku se bomo posvetili razdaljno-regularnim grafom samim. Ogledali si bomo njihove glavne značilnosti in navedli nekaj osnovnih izrekov, ki jih bomo rabili kasneje. Družina razdaljno-regularnih grafov, s katero se bomo v tej disertaciji tudi dosti ukvarjali, je družina Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov. Četrti razdelek bo zato namenjen njim. Poskusili bomo pojasniti, zakaj imajo Q-polinomski razdaljno-regularni grafi poseben pomen in kakšna je njihova vloga v konceptu "dualnosti", ki ga poznamo tudi v teoriji asociativnih shem oziroma razdaljno-regularnih grafov.

2.1 Asociativne sheme

Kot smo že omenili, so razdaljno-regularni grafi poddružina objektov, ki jih imenujemo asociativne sheme. Teorija asociativnih shem je eno pomembnejših poglavij algebraične kombinatorike. Nekatere lastnosti razdaljno-regularnih grafov pridejo bolj do izraza v kontekstu asociativnih shem. Naprimer, pomen Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov je bolj jasen, če te grafe obravnavamo kot poddružino asociativnih shem, kot pa če jih obravnavamo kot poddružino razdaljno-regularnih grafov. Zato je prav, da se na začetku vsaj bežno spoznamo tudi z asociativnimi shemami. Razdelek je povzet po članku Jurišić in Miklavič [26].

(Simetrična) asociativna shema z d razredi in n vozlišči je množica neničelnih, simetričnih, $(n \times n)$-razsežnih 01-matrik $I = A_0, A_1, \dots, A_d$, za katere velja:

(a) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$, kjer je J matrika samih enic,

(b) za vsaka $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$ je produkt $A_i A_j$ linearna kombinacija matrik $A_0, \dots, A_d$.

Asociativno shemo bomo označevali z $\mathcal{A}$ in ji rekli na kratko kar shema. Ker je A_i simetrična binarna matrika, je matrika sosednosti nekega (neusmerjenega) grafa Γ_i na n vozliščih. Če sta vozlišči x in y povezani v grafu Γ_i, bomo to simbolično zapisali takole: $x\,\Gamma_i\,y$. Rekli bomo, da sta x in y v i-ti relaciji. Iz pogoja (a) sledi, da za poljubni vozlišči x in y obstaja natanko en i, da je $x\,\Gamma_i\,y$, ter da graf Γ_i, $i \neq 0$, nima zank. Iz pogoja (b) pa sledi, da obstajajo take konstante p_{ij}^{h} , $i, j, h \in \{0, \dots, d\}$, da velja

$$A_i A_j = \sum_{h=0}^{d} p_{ij}^{h} A_h. \tag{2.1}$$

Pravimo jim *presečna števila* asociativne sheme $\mathcal{A}$. Ker so matrike A_i simetrične, s transponiranjem leve in desne strani enakosti (2.1) ugotovimo, da med seboj komutirajo. Zato za vsa presečna števila velja $p_{ij}^{h} = p_{ji}^{h}$.

Iz enakosti (2.1) pa razberemo tudi naslednji kombinatorični pomen presečnih števil p_{ij}^{h}, ki pojasni njihovo ime in zagotovi, da so nenegativna cela števila. Naj bosta x in y poljubni vozlišči, za kateri je $x\,\Gamma_h\,y$. Število vozlišč z, za katere velja $z\,\Gamma_i\,x$ in $z\,\Gamma_j\,y$, je enako p_{ij}^{h}, tj.

$$p_{ij}^{h} = |\{z\,;\; z\,\Gamma_i\,x \;\text{ in }\; z\,\Gamma_j\,y\}|. \tag{2.2}$$

Torej je Γ_i regularen graf stopnje $k_i := p^0_{ii}$ in je $p^0_{ij} = \delta_{ij} k_i$. Če štejemo trojice vozlišč (x, y, z), kjer je $x \,\Gamma_h\, y$, $z \,\Gamma_i\, x$ in $z \,\Gamma_j\, y$, na dva različna načina, dobimo še zvezo $k_h\, p^h_{ij} = k_j\, p^j_{ih}$.

Oglejmo si sedaj nekaj primerov asociativnih shem. Shema z enim razredom je sestavljena iz identične matrike in matrike sosednosti grafa, v katerem sta sosednji poljubni dve vozlišči, tj. grafa premera 1 oziroma polnega grafa K_n. Rekli bomo, da gre za *trivialno shemo*.

Hammingova shema $H(d, n)$. Naj bosta d in n poljubni naravni števili in $\Sigma = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Vozlišča asociativne sheme $H(d, n)$ so vse d-terice elementov iz Σ. Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji $(0 \le i \le d)$ natanko takrat, ko se razlikujeta v i mestih. Dobimo asociativno shemo z d razredi in n^d vozlišči.

Johnsonova shema $J(n, d)$. Naj bosta n in d poljubni naravni števili, za kateri je $d \le n$ in X poljubna množica z n elementi. Vozlišča asociativne sheme $J(n, d)$ so vse d-elementne podmnožice množice X. Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji $(0 \le i \le \min\{d, n-d\})$ natanko takrat, ko ima njun presek $d - i$ elementov. Na ta način dobimo asociativno shemo z $\min\{d, n-d\}$ razredi in $\binom{n}{d}$ vozlišči.

Ciklomatične sheme. Naj bo q potenca praštevila in d delitelj števila $q-1$. Naj bo C_1 podgrupa multiplikativne grupe obsega $\mathrm{GF}(q)$ indeksa d, in naj bodo $C_1, \ldots, C_d$ odseki podgrupe C_1. Vozlišča sheme so vsi elementi obsega $\mathrm{GF}(q)$. Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji, ko je $x - y \in C_i$ (in v 0-ti relaciji, ko je $x = y$). Da bi dobili asociativno shemo, mora biti $-1 \in C_1$, tako da so relacije simetrične, tj. $2 \mid d$, če je q lih.

Permutacijska grupa G, ki deluje na množici X, je *krepko-tranzitivna*, če za poljubna elementa x in y množice X obstaja tak $g \in G$, da je $xg = y$ in $yg = x$. Grupa avtomorfizmov cikla na n vozliščih je primer krepko-tranzitivne grupe. Diagonala kartezičnega produkta $X \times X$ je množica parov $\{(x, x) \mid x \in X\}$. Grupa G deluje naravno tudi na množici $X \times X$: element (x, y) preslika v element (xg, yg). Očitno je delovanje grupe G na X tranzitivno natanko takrat, ko je diagonala množice $X \times X$ orbita delovanja grupe G na $X \times X$. V tem primeru lahko na vsako nediagonalno orbito delovanja G na $X \times X$ gledamo kot na usmerjen graf z množico vozlišč X. Ko pa je grupa G krepko-tranzitivna, so orbite njenega delovanja na množici $X \times X$ simetrične. Nediagonalna orbita nam v tem primeru definira neusmerjen graf. Matrike sosednosti teh grafov tvorijo, skupaj z identično matriko, asociativno shemo. Število njenih razredov je enako številu nediagonalnih orbit, število vozlišč pa moči množice X.

Asociativne sheme sta konec tridesetih let prejšnjega stoletja vpeljala Bose in Nair [3] za potrebe statistike. Delsarte [13] pa je kasneje pokazal, da nam lahko služijo kot povezava med številnimi področji matematike, naprimer teorijo kodiranja in teorijo načrtov.

2.2 Bose-Mesnerjeva algebra

Kot smo že omenili, vsaki asociativni shemi lahko priredimo matrično algebro. Oglejmo si to algebro nekoliko podrobneje.

Naj bo $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_d\}$ asociativna shema. S span($\mathcal{A}$) bomo označili realen vektorski prostor, ki ga napenjajo matrike $A_0, \dots, A_d$. Zaradi identitete (2.1) je span($\mathcal{A}$) komutativna algebra. Poznamo jo pod imenom *Bose-Mesnerjeva algebra* asociativne sheme $\mathcal{A}$ in jo označimo z $\mathcal{M}$. Ker se matrike $A_0, \dots, A_d$ seštejejo v matriko J, ni težko ugotoviti, da so linearno neodvisne in so zato baza Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$.

Definirajmo sedaj *Schurovo množenje* matrik. Schurov produkt $m \times n$ matrik B in C je $m \times n$ matrika $B \circ C$, definirana z

$$(B \circ C)_{ij} = (B)_{ij}(C)_{ij} \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

Schurovo množenje je torej "množenje po komponentah". Hitro opazimo, da so matrike $A_0, \dots, A_d$ medsebojno pravokotni idempotenti za Schurovo množenje. Zato jih imenujemo tudi *Schurovi idempotenti* sheme $\mathcal{A}$. Bose-Mesnerjeva algebra je zato zaprta tudi za Schurovo množenje, matrika J pa je identiteta za to množenje.

Če povzamemo, span($\mathcal{A}$) je algebra z identiteto glede na običajno matrično množenje in glede na Schurovo množenje. Kot bomo videli, sta ti dve algebri v nekem smislu "dualni".

Naslednji izrek opiše še eno bazo algebre $\mathcal{M}$ (glej naprimer Godsil [17, Theorem 12.2.1]).

Izrek 2.2.1 *Naj bo $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_d\}$ asociativna shema nad n vozlišči. Potem obstajajo paroma pravokotne idempotentne matrike $E_0, \dots, E_d$ in realna števila $p_i(j)$, tako da velja:*

(i) $\sum_{j=0}^{d} E_j = I$,

(ii) $A_i E_j = p_i(j) E_j$,

(iii) $E_0 = \dfrac{1}{n} J$,

(iv) *matrike $E_0, \dots, E_d$ so baza $(d+1)$-razsežnega vektorskega prostora, generiranega z matrikami $A_0, \dots, A_d$.* ■

Matrike E_j imenujemo *glavni idempotenti* asociativne sheme $\mathcal{A}$. Vektorski podprostor, ki ga napenjajo stolpci matrike E_j, je skupni lastni podprostor matrik $A_0, A_1, \dots, A_d$. Kot pove točka (ii) izreka 2.2.1, je lastna vrednost matrike A_i na tem podprostoru enaka $p_i(j)$. Številom $p_i(j)$ zato pravimo tudi *lastne vrednosti* sheme $\mathcal{A}$. Hitro opazimo, da velja

$$A_i = A_i I = A_i \sum_{j=0}^{d} E_j = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j. \tag{2.3}$$

Ker so matrike $A_0, \ldots, A_d$ baza Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$, obstajajo taka realna števila $q_i(j)$ $(0 \le i, j \le d)$, da velja

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) A_j. \tag{2.4}$$

Števila $q_i(j)$ imenujemo *dualne lastne vrednosti* sheme $\mathcal{A}$. Naj na tem mestu opozorimo, da je enačba (2.4) "dual" enačbe (2.3). Poleg tega nam enačba (2.4) pove, da je

$$E_i \circ A_j = \frac{1}{n} q_i(j) A_j,$$

kar je "dual" točke (ii) izreka 2.2.1.

Hitro lahko dobimo še en par dualnih enačb. Že v razdelku 2.1 smo videli, da je

$$A_i A_j = \sum_{h=0}^{d} p_{ij}^h A_h.$$

Ker pa je $\mathcal{M}$ zaprta tudi za Schurovo množenje, in ker so matrike E_i tudi baza algebre $\mathcal{M}$, obstajajo števila q_{ij}^h $(0 \le i, j, h \le d)$, tako da je

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{d} q_{ij}^h E_h \quad (0 \le i, j \le d). \tag{2.5}$$

Števila q_{ij}^h imenujemo *kreinovi parametri* asociativne sheme $\mathcal{A}$. Omenimo, da za razliko od presečnih števil p_{ij}^h kreinovi parametri q_{ij}^h niso nujno celoštevilski. Medtem ko imajo presečna števila jasen in preprost kombinatoričen pomen, pa v splošnem kombinatoričen pomen kreinovih parametrov še ni znan. Nekaj delnih rezultatov v tej smeri bralec lahko dobi v Cameron, Goethals in Seidel [7, Theorem 5.4], Godsil in Hensel [18], ter Jurišić in Koolen [22]. Določitev kombinatoričnega pomena kreinovih parametrov je ena izmed gonilnih sil celotne teorije asociativnih shem. Pomemben izrek, ki nam pove, da so kreinovi parametri asociativne sheme nenegativni, je prvi dokazal Scott [41]. Dokaz pa si bralec lahko prebere tudi v Godsil [17, Lemma 12.4.1].

Izrek 2.2.2 *Kreinovi parametri q_{ij}^h asociativne sheme $\mathcal{A}$ so nenegativni.* ■

2.3 Razdaljno-regularni grafi

Razdaljno-regularni grafi so pomemben razred asociativnih shem. Definiramo jih lahko na več, med seboj ekvivalentnih, načinov. V tem razdelku jih bomo definirali na dva načina: najprej na algebraičen način iz asociativnih shem, potem pa še povsem kombinatorično. Pred nadaljevanjem razdelka vpeljimo še nekaj oznak (glej tudi dodatek A). Za poljuben graf Γ in njegovi poljubni vozlišči x in y, bomo z $\partial(x, y)$

označevali razdaljo med vozliščema x in y, z d pa premer grafa Γ. Naj bo i poljubno nenegativno celo število. Z $\Gamma_i(x)$ bomo označili množico vseh tistih vozlišč grafa Γ, ki so na razdalji i od vozlišča x. Množico vseh sosedov vozlišča x, torej množico $\Gamma_1(x)$, bomo na kratko označevali z $\Gamma(x)$. Povrnimo se sedaj k razdaljno-regularnim grafom.

Ni težko videti, da so presečna števila p_{ij}^h $(0 \leq i, j, h \leq d)$ asociativne sheme $\mathcal{A}$ z d razredi odvisna od vrstnega reda matrik $A_0, A_1, \ldots A_d$. Pravimo, da je shema $\mathcal{A}$ *metrična* glede na dan vrstni red matrik $A_0 = I, A_1, \ldots, A_d$, če velja, da je $p_{ij}^h = 0$ brž ko je eno izmed števil i, j, h večje od vsote drugih dveh, in da je $p_{ij}^h \neq 0$ brž ko je eno izmed števil i, j, h enako vsoti drugih dveh.

Asociativna shema $\mathcal{A}$ je *P-polinomska* glede na dan vrstni red matrik $A_0 = I, A_1, \ldots, A_d$, če za vsak i $(0 \leq i \leq d)$ obstajaja tak polinom p_i stopnje i, da je

$$A_i = p_i(A_1).$$

Kot je pokazal Delsarte [13] (glej tudi Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 2.7.1]), je asociativna shema metrična za dan vrstni red svojih matrik natanko tedaj, ko je P-polinomska za ta isti vrstni red. Johnsonove ter Hammingove asociativne sheme so primer metričnih asociativnih shem, medtem ko asociativne sheme dobljene iz krepko-tranzitivnih grup niso nujno metrične. Definirajmo sedaj razdaljno-regularne grafe.

Definicija 2.3.1 *Razdaljno-regularni grafi so grafi Γ_1 metrični asociativnih shem.*

Druga, povsem kombinatorična definicija razdaljno-regularnih grafov pa je taka.

Definicija 2.3.2 *Povezan graf Γ s premerom d je razdaljno-regularen, če je za poljubna cela števila i, j, h $(0 \leq i, j, h \leq d)$ in poljubni dve vozlišči $x, y \in V\Gamma$, za kateri je $\partial(x, y) = h$, število*

$$p_{ij}^h = |\{z \in V\Gamma \mid \partial(x, z) = i \ \text{ in } \ \partial(y, z) = j\}|$$

neodvisno od izbire vozlišč x in y.

Z drugimi besedami, povezan graf Γ je razdaljno-regularen, če je moč preseka poljubnih dveh njegovih sfer odvisna samo od radija teh dveh sfer in od medsebojne razdalje središč teh sfer, ni pa odvisna od središč samih. Števila p_{ij}^h razdaljno-regularnega grafa Γ imenujemo *presečna števila* grafa Γ.

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d z n vozlišči. Za vsako nenegativno celo število i $(0 \leq i \leq d)$ definirajmo *razdaljno matriko* A_i grafa Γ na naslednji način. Matrike A_i naj bodo dimenzije $n \times n$, njihovi stolpci in vrstice pa naj bodo indeksirani z vozlišči grafa Γ. Definiramo

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial(x, y) = i, \\ & \\ 0 & \text{if } \partial(x, y) \neq i \end{cases} \qquad (x, y \in V\Gamma). \tag{2.6}$$

Ni se težko prepričati, da je $A_0 = I$, A_1 pa je kar matrika sosednosti grafa Γ. Da sta definiciji 2.3.1 in 2.3.2 razdaljno-regularnih grafov med seboj ekvivalentni, se bralec lahko prepriča naprimer v Godsil [17, Lemma 12.3.1]. Razdaljne matrike razdaljno-regularnega grafa tvorijo namreč ravno asociativno shemo, presečna števila te sheme pa so ravno presečna števila grafa Γ.

2.3.1 Presečna števila

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf. Kot se izkaže, lahko vsa presečna števila grafa Γ izračunamo iz presečnih števil $p^i_{1,i-1}$ $(1 \leq i \leq d)$, p^i_{1i} $(0 \leq i \leq d)$ in $p^i_{1,i+1}$ $(0 \leq i \leq d-1)$, glej naprimer Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Lemma 4.1.7]. Zato tem presečnim številom navadno damo krajše oznake:

$$p^i_{1,i-1} = c_i \ (1 \leq i \leq d), \quad p^i_{1i} = a_i \ (0 \leq i \leq d), \quad p^i_{1,i+1} = b_i \ (0 \leq i \leq d-1),$$

dodatno pa definiramo še $c_0 = b_d = 0$. Hitro vidimo, da je $a_0 = 0$ in $c_1 = 1$. Ker ima vsako vozlišče grafa Γ natanko $p^0_{11} = b_0$ sosedov, je graf Γ regularen stopnje b_0.

Vzemimo sedaj vozlišči x, y grafa Γ, za kateri je $\partial(x,y) = i$ $(0 \leq i \leq d)$. Po definiciji razdaljne-regularnosti in zaradi trikotniške neenakosti ima y natanko c_i sosedov, ki so od x oddaljeni $i-1$, natanko a_i sosedov, ki so od x oddaljeni i, natanko b_i sosedov, ki so od x oddaljeni $i+1$, in nobenih drugih sosedov več. Torej je $a_i + b_i + c_i = b_0$ $(0 \leq i \leq d)$. Zato izmed presečnih števil navadno podamo le števila b_i in c_i, te pa razvrstimo v *presečno tabelo*:

$$\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}.$$

Pripomnimo, da je graf Γ dvodelen natanko takrat, ko je $a_i = 0$ za vsak i $(0 \leq i \leq d)$.

Za vsako vozlišče x razdaljno-regularenega grafa Γ označimo s $k_i(x)$ moč množice $\Gamma_i(x)$ $(0 \leq i \leq d)$. Ker je $k_i(x) = p^0_{ii}$, števila $k_i = k_i(x)$ niso odvisna od izbire vozlišča x. Hitro se lahko s pomočjo štetja povezav med $\Gamma_{i-1}(x)$ in $\Gamma_i(x)$ na dva različna načina prepričamo, da velja $k_{i-1}b_{i-1} = k_i c_i$. Ker pa je $k_0(x) = 1$, dobimo

$$k_i = k_i(x) = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i}.$$

V naslednjem izreku bomo podali nekaj osnovnih lastnosti presečnih števil razdaljno-regularnega grafa Γ. Dokaz si bralec lahko ogleda v Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 4.1.6].

Izrek 2.3.3 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d s presečno tabelo $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}$. Potem velja:*

(i) $b_0 > b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{d-1} \geq 1$,

(ii) $1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_d$,

(iii) *če je $i + j \leq d$, potem je $c_i \leq b_j$.* ∎

2.3.2 Primitivnost in neprimitivnost

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d. Za vsako naravo število i $(1 \leq i \leq d)$ označimo z Γ_i graf, ki ima ista vozlišča kot graf Γ, vozlišči x in y pa naj bosta v grafu Γ_i povezani natanko tedaj, ko sta v grafu Γ na razdalji i. Graf Γ_i imenujemo *i-ti razdaljni graf* grafa Γ. Hitro se lahko prepričamo, da je matrika sosednosti grafa Γ_i ravno i-ta razdaljna matrika A_i grafa Γ.

Razdaljno-regularen graf Γ imenujemo *primitiven*, če so vsi njegovi razdaljni grafi povezani, in *neprimitiven* sicer. Dvodelni razdaljno-regularni grafi so primer neprimitivnih razdaljno-regularnih grafov, saj je v tem primeru graf Γ_2 očitno nepovezan. Drug primer pa so antipodni razdaljno-regularni grafi. Razdaljno-regularen graf Γ je *antipoden*, če je relacija R na množici vozlišč grafa Γ, definirana z $xRy \iff \partial(x,y) \in \{0,d\}$, ekvivalenčna relacija. Če je Γ antipoden graf premera $d \geq 2$, potem je seveda graf Γ_d nepovezan. Kot je dokazal Smith [42] (glej tudi Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 4.2.1]), je neprimitiven razdaljno-regularen graf s stopnjo $k > 2$ bodisi dvodelen bodisi antipoden (lahko tudi dvodelen in antipoden hkrati).

Če je Γ dvodelen, potem ima njegov drugi razdaljni graf Γ_2 dve komponenti. Grafa, ki jih ti dve komponenti inducirata na grafu Γ_2, označujemo z Γ^+ in Γ^-, oziroma z $\frac{1}{2}\Gamma$ za poljubnega od njih. Imenujemo jih *polovična grafa* grafa Γ. Naj omenimo, da ni nujno, da sta Γ^+ in Γ^- izomorfna.

Če je Γ antipoden razdaljno-regularen graf, potem ekvivalenčni razredi relacije R določajo particijo vozlišč grafa Γ. Množice te particije imenujemo *vlakna* oziroma *antipodni razredi* grafa Γ. Če je premer grafa Γ vsaj 3, potem med poljubnima antipodnima razredoma grafa Γ bodisi ni povezav bodisi je med njima popolno prirejanje, glej naprimer Godsil [17, Lemma 11.5.2]. Torej imajo v tem primeru vsi antipodni razredi grafa Γ enako moč, ki jo navadno označimo z r in imenujemo *indeks* grafa Γ. Graf $\overline{\Gamma}$, ki ima za množico vozlišč množico antipodnih razredov grafa Γ, dva antipodna razreda pa sta sosednja natanko tedaj, ko vsebujeta povezani vozlišči grafa Γ, imenujemo *antipodni kvocient* grafa Γ. Grafu Γ pa pravimo tudi *r-listni antipodni krov* grafa $\overline{\Gamma}$. Krovna projekcija nam seveda vsa vozlišča antipodnega razreda grafa Γ preslika v ustrezno vozlišče grafa $\overline{\Gamma}$. Naj omenimo še, da so antipodni razdaljno-regularni grafi premera 2 natanko regularni polni večdelni grafi. V naslednji lemi bomo navedli nekaj dejstev v zvezi z neprimitivnimi razdaljno-regularnimi grafi ter njihovimi antipodnimi kvocienti in njihovimi polovičnimi grafi.

Lema 2.3.4 (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 141, Proposition 4.2.2]) *Naj bo Γ neprimitiven razdaljno-regularen graf premera d in stopnje $k > 2$. Potem veljajo naslednje trditve.*

(i) *Če je Γ dvodelen, potem sta njegova polovična grafa nedvodelna razdaljno-regularna grafa premera $\lfloor d/2 \rfloor$.*

(ii) *Če je Γ antipoden, potem je $\overline{\Gamma}$ razdaljno-regularen premera $\lfloor d/2 \rfloor$.*

(iii) *Če je Γ antipoden, potem $\overline{\Gamma}$ ni antipoden, razen če je $d = 3$ (v tem primeru* *je $\overline{\Gamma}$ poln graf), ali če je Γ dvodelen graf premera 4 (v tem primeru je $\overline{\Gamma}$ poln večdelen graf).*

(iv) *Če je Γ antipoden in ima bodisi lih premer bodisi ni dvodelen, potem je $\overline{\Gamma}$ primitiven.*

(v) *Če je Γ dvodelen in ima bodisi lih premer bodisi ni antipoden, potem sta njegova polovična grafa primitivna.*

(vi) *Če ima Γ sod premer in je antipoden in dvodelen, potem je $\overline{\Gamma}$ dvodelen, njegova polovična grafa pa sta antipodna. Graf $\overline{\frac{1}{2}\Gamma}$ je primitiven in izomorfen grafu $\frac{1}{2}\overline{\Gamma}$.*

■

2.3.3 Bose-Mesnerjeva algebra razdaljno-regularnega grafa

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d na n vozliščih. Kot smo že omenili, so razdaljne matrike $A_0, \ldots, A_d$ grafa Γ baza matrične algebre $\mathcal{M}$, ki jo imenujemo Bose-Mesnerjeva algebra grafa Γ. Ta algebra je zaprta tako za običajno množenje matrik, kot za množenje "po komponentah", oziroma Shurovo množenje matrik. Poleg te baze ima algebra $\mathcal{M}$ še eno bazo, ki jo sestavljajo matrike $E_0, \ldots, E_d$. Lastnosti te baze smo opisali v izreku 2.2.1, matrike E_i pa imenujemo *glavni idempotenti* grafa Γ.

Lastne vrednosti matrike sosednosti $A = A_1$ grafa Γ smo označili s $p_1(j)$ $(0 \leq j \leq d)$. Kadar imamo opravka z razdaljno-regularnimi grafi, pa raje namesto oznake $p_1(j)$ uporabljamo oznako θ_j. Lastne vrednosti matrike A so torej števila θ_j $(0 \leq j \leq d)$. Iz enačbe (2.3) tako dobimo

$$A = \sum_{j=0}^{d} \theta_j E_j.$$

Zato tudi pravimo, da je lastna vrednost θ_j *prirejena* glavnemu idempotentu E_j, oziroma, da je glavni idempotent E_j *prirejen* lastni vrednosti θ_j.

Naj bo E glavni idempotent grafa Γ, θ pa njegova prirejena lastna vrednost. Z m_θ označimo večkratnost lastne vrednosti θ. Ker so matrike $A_0, \ldots, A_d$ baza algebre $\mathcal{M}$, obstajajo taka števila $\theta_0^*, \ldots, \theta_d^*$, da velja (glej tudi enačbo (2.4))

$$E = \frac{m_\theta}{n} \sum_{i=0}^{d} \theta_i^* A_i. \tag{2.7}$$

Zaporedje $\theta_0^*, \ldots, \theta_d^*$ imenujemo *zaporedje dualnih lastnih vrednosti* grafa Γ, prirejeno glavnemu idempotentu E (oziroma lastni vrednosti θ).

Včasih se izkaže, da je zelo priročno, če $V\Gamma$ identificiramo s standardno ortonormirano bazo evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$. V tem prostoru nam $\langle , \rangle$ označuje skalarni produkt

$$\langle u, v\rangle = u^T v \quad (u, v \in \mathbb{R}^n),$$

kjer smo s T označili transponiranje. Primer, kjer se ta identifikacija izkaže za zelo uporabno, je naslednja lema.

Lema 2.3.5 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d na n vozliščih s presečnimi števili a_i, b_i, c_i $(0 \le i \le d)$. Naj bo E glavni idempotent grafa Γ, θ njegova prirejena lastna vrednost, m_θ pa njena večkratnost. Naj bo $\theta_0^*, \dots, \theta_d^*$ zaporedje dualnih lastnih vrednosti, prirejeno glavnemu idempotentu E. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) *Če sta x, y poljubni vozlišči grafa Γ, za kateri je $\partial(x,y) = i$, potem je*

$$\langle Ex, Ey \rangle = \frac{m_\theta \theta_i^*}{n}.$$

(ii) *Dualne lastne vrednosti zadoščajo tričleni rekurzivni formuli*

$$c_i\theta_{i-1}^* + a_i\theta_i^* + b_i\theta_{i+1}^* = \theta\theta_i^* \quad (0 \le i \le d),$$

pri čemer je dualna lastna vrednost θ_0^* enaka 1, θ_{-1}^* in θ_{d+1}^* pa sta nedoločenki.

DOKAZ. (i) Naj bosta x, y vozlišči grafa Γ in $\partial(x,y) = i$ $(0 \le i \le d)$. Potem iz (2.7) dobimo

$$\langle Ex, Ey \rangle = \langle E^2x, y \rangle = \langle Ex, y \rangle = \frac{m_\theta}{n} \sum_{j=0}^{d} \theta_j^* \langle A_j x, y \rangle = \frac{m_\theta}{n}\theta_i^*.$$

(ii) Glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 128, enačba (13)]. ■

Razdelek končajmo z naslednjo definicijo. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf na n vozliščih, E njegov glavni idempotent in naj bo $A \subseteq V\Gamma$. Kot smo že povedali, bomo vozlišča grafa Γ večkrat predstavili kot elemente standardne ortonormirane baze evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$. V tem primeru bomo z $\langle A \rangle_E$ označili vektorski podprostor, ki ga napenjajo vektorji $\{Ea \mid a \in A\}$.

2.4 Q-polinomski razdaljno-regularni grafi

V razdelku 2.3 smo razdaljno-regularne grafe definirali kot metrične asociativne sheme, torej tiste asociativne sheme, v katerih presečna števila zadoščajo neke vrste "trikotniški neenakosti". To nas spodbudi, da definiramo tudi dual metričnih asociativnih shem. Pravimo, da je d razredna asociativna shema $\mathcal{A}$ na n vozliščih *kometrična* glede na dan vrstni red glavnih idempotentov $E_0 = \frac{1}{n}J, E_1, \dots, E_d$, če velja, da je $q_{ij}^h = 0$, brž ko je eno izmed števil h, i, j $(0 \le h, i, j \le d)$ večje od vsote drugih dveh, in da je $q_{ij}^h \neq 0$, brž ko je eno od števil h, i, j enako vsoti drugih dveh.

Podobno kot smo definirali P-polinomske asociativne sheme, definiramo tudi Q-polinomske asociativne sheme. Asociativna shema $\mathcal{A}$ je *Q-polinomska* glede na dan vrstni red glavnih idempotentov $E_0 = \frac{1}{n}J, E_1, \dots, E_d$, če za vsak i $(0 \le i \le d)$ obstaja tak polinom q_i stopnje i, da je

$$E_i = q_i(E_1),$$

pri čemer za izračun matrike $q_i(E_1)$ namesto običajnega matričnega množenja uporabljamo Schurovo množenje matrik. Tudi v tem primeru je Delsarte [13] (glej tudi

Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 2.7.1]) pokazal, da so kometrične in Q-polinomske asociativne sheme ekvivalentne: asociativna shema je kometrična za dan vrstni red svojih glavnih idempotentov natanko takrat, ko je Q-polinomska za isti vrstni red glavnih idempotentov. Pravimo, da je asociativna shema $\mathcal{A}$ *kometrična* (oziroma *Q-polinomska*) *glede na glavni idempotent* E, če obstaja vrstni red glavnih idempotentov $E_0 = \frac{1}{n}J, E_1 = E, \ldots, E_d$, glede na katerega je $\mathcal{A}$ kometrična (oziroma Q-polinomska).

Medtem ko imajo metrične asociativne sheme zelo lepo kombinatorično interpretacijo (so namreč tesno povezane z razdaljno-regularnimi grafi), pa ni znanega nič podobnega za kometrične asociativne sheme. Kar pa še ne pomeni, da za kometrične asociativne sheme ne znamo dokazati kar nekaj rezultatov, ki jih za splošne asociativne sheme ne znamo.

Razdaljno-regularen graf Γ je *Q-polinomski*, če je asociativna shema, ki jo določa Γ, Q-polinomska. Q-polinomski razdaljno-regularni grafi so torej ekvivalentni tistim asociativnim shemam, ki so P- in Q-polinomske.

Q-polinomski razdaljno-regularni grafi so pomemben razred razdaljno-regularnih grafov. Naprimer, vsi razdaljno-regularni grafi s klasičnimi parametri so Q-polinomski (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 6.1] ali podrazdelek 5.1.1). Ker je klasifikacijo vseh razdaljno-regularnih grafov zaenkrat še nerealno pričakovati, je Bannai predlagal, da bi poskusili klasificirati vsaj Q-polinomske razdaljno-regularne grafe. Čeprav končna klasifikacija le-teh zaenkrat še ni dosežena, pa jo je realno pričakovati v doglednem času. Razlog za to so nekateri lepi in močni rezultati o Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafih. Nekaj teh omenimo tudi tukaj.

Verjetno je najpomembnejši rezultat o Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafih ta, da se dajo presečna števila Q-polinomskega razdaljno-regularnega grafa izraziti samo s petimi parametri. Prvi je ta rezultat dokazal Leonard v [29]. Pokazal je, da se dajo vsa presečna števila Q-polinomskega razdaljno-regularnega grafa izraziti s stopnjo k, presečnimi števili b_1, b_2 in c_2, ter drugo največjo lastno vrednostjo θ_1. Podoben rezultat najdemo v Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 8.1.5]. Na žalost pa tako dobljene formule za presečna števila niso ravno enostavne.

S pomočjo tega rezultata sta Bannai in Ito v [1] (glej tudi Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 8.3.5]) dokazala, da so lastne vrednosti Q-polinomskega razdaljno-regularnega grafa stopnje $k > 2$ in premera $d \geq 34$ celoštevilske.

Naslednjo lemo sta dokazala Bannai in Ito [1, stran 193], glej tudi Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 8.1.1].

Lema 2.4.1 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d, E njegov glavni idempotent, ter $\theta_0^*, \ldots, \theta_d^*$ zaporedje dualnih lastnih vrednosti, prirejeno glavnemu idempotentu E. Če je Γ Q-polinomski glede na E, potem so števila $\theta_0^*, \ldots, \theta_d^*$ paroma različna.* ■

Zaključimo z naslednjim Terwilligerjevim izrekom, ki bo igral glavno vlogo v našem raziskovanju Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafih.

Izrek 2.4.2 (Terwilliger [45, Theorem 3.3]) *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, E njegov glavni idempotent, ter $\theta_0^*, \ldots, \theta_d^*$ zaporedje dualnih lastnih vrednosti, prirejeno glavnemu idempotentu E. Potem sta ekvivalentni naslednji trditvi:*

(i) *Γ je Q-polinomski glede na E.*

(ii) *$\theta_0^* \neq \theta_i^*$ $(1 \leq i \leq d)$, za poljubna cela števila h, i, j $(1 \leq h \leq d,\ 0 \leq i, j \leq d)$ in za poljubni vozlišči $x, y \in V\Gamma$, za kateri je $\partial(x, y) = h$, velja:*

$$\sum_{\substack{z \in V\Gamma \\ \partial(x,z)=i \\ \partial(y,z)=j}} Ez - \sum_{\substack{z \in V\Gamma \\ \partial(x,z)=j \\ \partial(y,z)=i}} Ez \in span\{Ex - Ey\}.$$

Če držita trditvi (i) *in* (ii)*, potem za poljubna cela števila h, i, j $(1 \leq h \leq d,\ 0 \leq i, j \leq d)$ in za poljubni vozlišči $x, y \in V\Gamma$, za kateri je $\partial(x, y) = h$, velja*

$$\sum_{\substack{z \in V\Gamma \\ \partial(x,z)=i \\ \partial(y,z)=j}} Ez - \sum_{\substack{z \in V\Gamma \\ \partial(x,z)=j \\ \partial(y,z)=i}} Ez = p_{ij}^h \frac{\theta_i^* - \theta_j^*}{\theta_0^* - \theta_h^*}(Ex - Ey). \tag{2.8}$$

■

Ker bo ta izrek igral osrednjo vlogo v poglavju 5, omenimo vsaj glavno idejo njegovega dokaza. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d in E njegov glavni idempotent. Izberimo si $x, y \in V\Gamma$ in celi števili i, j $(0 \leq i, j \leq d)$. Definirajmo vektorja

$$u = \sum_{\substack{z \in V\Gamma \\ \partial(x,z)=i \\ \partial(y,z)=j}} Ez - \sum_{\substack{z \in V\Gamma \\ \partial(x,z)=j \\ \partial(y,z)=i}} Ez \quad \text{in} \quad v = Ex - Ey.$$

Za vektorja u in v uporabimo Cauchy-Schwartzovo neenakost: $||u^2||||v||^2 \geq \langle u, v\rangle$. S pomočjo leme 2.3.5(i) to neenakost izrazimo s presečnimi števili grafa Γ ter z dualnimi lastnimi vrednostmi $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$, ki pripadajo glavnemu idempotentu E. Tako dobimo neenakost, kateri morajo zadoščati presečna števila in dualne lastne vrednosti grafa Γ. Vemo pa, da je v tej neenakosti dosežena enakost natanko takrat, ko sta vektorja u in v kolinearna. Dokaz izreka dokončamo tako, da pokažemo, da v dobljeni neenakosti velja enakost tudi natanko takrat, ko je graf Γ Q-polinomski.

Poglavje 3

1-homogeni grafi

1-homogeni grafi so podrazred razdaljno-regularnih grafov. V poglavjih 4 in 5 te disertacije bodo igrali osrednjo vlogo. V širšem kontekstu h-homogenih grafov ($h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) jih je vpeljal Nomura [38]. V povezavi z razdaljno-regularnimi grafi so izmed h-homogenih grafov najbolj pomembni ravno 1-homogeni grafi, saj je vsak 1-homogen graf tudi razdaljno-regularen. Kot bomo videli, za ostale h-homogene grafe to ni nujno res.

1-homogene grafe (kot tudi splošne h-homogene grafe) najlažje definiramo s pomočjo ekvitabilnih particij. Zato bomo v prvem razdelku tega poglavja najprej definirali in predstavili le-te. Ta razdelek je povzet po članku Jurišić in Miklavič [27]. V drugem razdelku bomo definirali h-homogene grafe. Pokazali bomo, da je vsak 1-homogen graf razdaljno-regularen. V tretjem razdelku bomo predstavili nekaj rezultatov o 1-homogenih grafih.

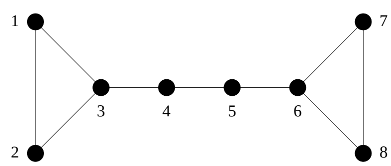
3.1 Ekvitabilne particije

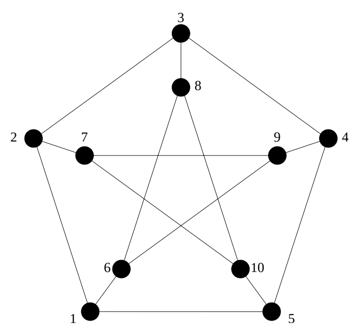
Konstrukcija kvocientnega grafa je v teoriji grafov pomemben in koristen postopek. Z njo lahko iz "velikega" grafa Γ dobimo graf, ki ima marsikaj skupnega z grafom Γ. Ker pa je kvocientni graf manjši od originalnega grafa Γ, pridemo do informacij o skupnih lastnostih dosti lažje s študiranjem kvocientnega grafa, kot pa grafa Γ. Tak primer je, recimo, računanje lastnih vrednosti grafa. Vzemimo naprimer graf povezav Petersenovega grafa. Namesto da bi njegove lastne vrednosti računali kot lastne vrednosti matrike dimenzije 15×15, je dovolj, da izračunamo lastne vrednosti matrike dimenzije 4×4.

Kvocientni graf definiramo preko ekvitabilnih particij vozlišč grafa. V nekaterih primerih (razdaljno-regularni grafi) lahko iz kvocientnega grafa dobimo celotno informacijo o lastnih vrednostih in lastnih vektorjih originalnega grafa. Seveda pa ekvitabilne particije niso uporabne samo za konstrukcijo kvocientnih grafov. Uporabne so pri študiju asociativnih shem, pri iskanju grupe automorfizmov grafa, definicijo pa lahko razširimo tudi na ekvitabilne particije matrike.

Ker je najbolj naravno, da nove pojme vpeljemo preko primerov, začnimo z dvema zanimivima kombinatoričnima objektoma – dodekaedrom in Petersenovim grafom. Definirajmo dvoelementne množice, katerih elementi so vozlišča dodekaedra: v vsaki množici naj bosta tisti dve vozlišči dodekaedra, ki imata medsebojno razdaljo enako 5. Naj bodo sedaj te dvoelementne podmnožice vozlišča novega grafa. Vozlišči naj bosta povezeni natanko takrat, kadar ustrezni množici vsebujeta sosednji vozlišči dodekaedra. Graf, ki ga na tak način dobimo, je Petersenov graf.

Naj bo Γ graf in $V\Gamma$ množica njegovih vozlišč. *Particija* množice $V\Gamma$ naj bo množica disjunktnih in nepraznih podmnožic množice $V\Gamma$, katerih unija je enaka množici $V\Gamma$. Particija $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ je *ekvitabilna*, če za poljubna indeksa i in j $(1 \leq i, j \leq s)$ velja, da je število sosedov, ki jih ima poljubno vozlišče iz množice C_i v množici C_j, neodvisno od izbire vozlišča iz C_i. Podgraf, ki je induciran s poljubno množico ekvitabilne particije π je torej regularen, saj ima vsako vozlišče iz množice C_i v množici C_i isto število sosedov. Podobno je vsak dvodelen graf, ki ga inducirajo povezave, ki povezujejo vozlišča dveh različnih množic particije π, "biregularen" - vozlišča, ki pripadajo isti množici particije, imajo isto stopnjo. Na sliki 3.1 vidimo dva primera ekvitabilnih particij.





Slika 3.1: Particija $\pi = \{\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \{3, 6\}\}$ je ekvitabilna particija vozlišč McKay-evega grafa Γ_1 (na levi), particija $\sigma = \{\{1\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8, 9, 10\}\}$ pa ekvitabilna particija vozlišč Petersenovega grafa Γ_2 (na desni).

Celo družino primerov ekvitabilnih particij vozlišč grafa Γ dobimo s pomočjo njegove grupe avtomorfizmov. Naj bo G neka podgrupa grupe avtomorfizmov grafa Γ. Orbite podgrupe G določajo particijo množice vozlišč grafa Γ. Naj bosta x in y vozlišči grafa Γ, ki ležita v isti množici te particije. Potem obstaja tak $f \in G$, da je $f(x) = y$. Ker pa f preslika vsako množico te particije samo nase, imata x in y v vsaki množici particije isto število sosedov. Particija je zato ekvitabilna. Na sliki 3.1 množice particije McKayevega grafa niso orbite nobene podgrupe grupe avtomorfizmov tega grafa, medtem ko so množice particije Petersenovega grafa orbite stabilizatorja vozlišča 1.

Naj bo dana ekvitabilna particija $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ množice vozlišč grafa Γ. S c_{ij} $(1 \leq i, j \leq s)$ označimo število sosedov, ki jih ima poljubno vozlišče iz množice C_i

v množici C_j. Števila c_{ij} $(1 \leq i, j \leq s)$ imenujemo *parametri* ekvitabilne particije π. *Kvocientni graf* Γ/π je usmerjen graf z množico vozlišč $\{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$, v katerem gre od vozlišča C_i do vozlišča C_j natanko c_{ij} usmerjenih povezav. V splošnem ima lahko kvocientni graf tako večkratne povezave kot tudi zanke. Matrika sosednosti kvocientnega grafa Γ/π je matrika dimenzije $s \times s$, ki ima ij-ti element enak c_{ij}. V prejšnjih dveh primerih je

$$A(\Gamma_1/\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad A(\Gamma_2/\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ekvitabilne particije se izkažejo za zelo uporabne. Kot bomo videli, je vsaka lastna vrednost kvocientnega grafa Γ/π tudi lastna vrednost grafa Γ, karakteristični polinom kvocientnega grafa Γ/π pa vedno deli karakteristični polinom grafa Γ.

Karakteristična matrika $P = P(\pi)$ particije $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ grafa Γ z n vozlišči je matrika dimenzije $n \times s$, katere ij-ti element je 1, če je i-to vozlišče grafa Γ vsebovano v množici C_j, in 0 sicer. Pokažimo sedaj naslednjo lemo.

Lema 3.1.1 *Naj bo $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ particija vozlišč grafa Γ, P njena karakteristična matrika in A matrika sosednosti grafa Γ. Particija π je ekvitabilna natanko tedaj, ko obstaja taka matrika B, da je*

$$AP = PB.$$

Matrika B je v tem primeru enaka matriki sosednosti kvocientnega grafa Γ/π.

DOKAZ. Naj bo π ekvitabilna particija vozlišč grafa Γ, števila c_{ij} $(1 \leq i, j \leq s)$ pa njeni parametri. Element ij matrike AP je enak številu sosedov, ki jih ima i-to vozlišče grafa Γ v množici C_j. Ker je particija π ekvitabilna, je to število odvisno samo od množice particije π, v kateri i-to vozlišče grafa Γ leži. Torej so tiste vrstice produkta AP, ki pripadajo vozliščem iz množice C_ℓ, enake $(c_{\ell 1}, c_{\ell 2}, \ldots, c_{\ell s})$ $(1 \leq \ell \leq s)$. Prav to pa so tudi vrstice produkta PB, kjer je B matrika sosednosti kvocientnega grafa Γ/π.

Naj bo sedaj $AP = PB$ za neko matriko B. Naj bosta i, j vozlišči grafa Γ iz množice C_ℓ particije π. Naj bo C_r poljubna množica particije π. Vozlišče i ima $(AP)_{ir}$ sosedov v C_r, vozlišče j pa $(AP)_{jr}$. Ker pa je $(AP)_{ir} = (PB)_{ir}$ in $(AP)_{jr} = (PB)_{jr}$, je

$$(AP)_{ir} = \sum_{a=1}^{s} p_{ia} b_{ar} = b_{\ell r} \qquad \text{in} \qquad (AP)_{jr} = \sum_{a=1}^{s} p_{ja} b_{ar} = b_{\ell r}.$$

Torej imata dve poljubni vozlišči iz C_ℓ vedno $b_{\ell r}$ sosedov v C_r. To pa pomeni, da je particija π ekvitabilna, matrika B pa je očitno ravno matrika sosednosti kvocientnega grafa Γ/π. ■

Definicijo ekvitabilne particije pa lahko povemo tudi v jeziku linearne algebre. Velja namreč naslednja lema.

Lema 3.1.2 *Naj bo Γ graf, matrika A njegova matrika sosednosti in π particija vozlišč grafa Γ s karakteristično matriko P. Potem je π ekvitabilna natanko tedaj, ko je vektorski podprostor, ki ga napenjajo stolpci matrike P, A-invarianten.*

DOKAZ. Vemo, da je vektorski podprostor, ki ga napenjajo stolpci matrike P, A-invarianten natanko tedaj, ko obstaja taka matrika B, da velja $AP = PB$. Lema sedaj sledi iz leme 3.1.1. ■

Z naslednjim izrekom bomo povezali lastne vrednosti in lastne vektorje kvocientnega grafa Γ/π z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji grafa Γ.

Izrek 3.1.3 *Naj bo $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ ekvitabilna particija množice vozlišč grafa Γ, P njena karakteristična matrika, A matrika sosednosti grafa Γ in B matrika sosednosti kvocientnega grafa Γ/π. Naj bo $\boldsymbol{x}$ vektor dimenzije $s \times 1$, $\boldsymbol{y}$ vektor dimenzije $n \times 1$, kjer je n število vozlišč grafa Γ, in θ realno število. Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) *Če je $B\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$, potem je $AP\boldsymbol{x} = \theta P\boldsymbol{x}$.*

(ii) *Če je $A\boldsymbol{y} = \theta\boldsymbol{y}$, potem je $\boldsymbol{y}^T PB = \theta\boldsymbol{y}^T P$.*

(iii) *Karakteristični polinom matrike B deli karakteristični polinom matrike A.*

DOKAZ. Če je $B\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$, potem je po lemi 3.1.1

$$AP\boldsymbol{x} = PB\boldsymbol{x} = P\theta\boldsymbol{x} = \theta P\boldsymbol{x}.$$

Podobno, če je $A\boldsymbol{y} = \theta\boldsymbol{y}$, potem je zopet po lemi 3.1.1

$$\boldsymbol{y}^T PB = \boldsymbol{y}^T AP = \theta\boldsymbol{y}^T P.$$

Dokazati moramo še točko (iii). Če je vektor $\boldsymbol{x}$ različen od vektorja $\mathbf{0}$, potem je tudi vektor $P\boldsymbol{x}$ neničeln. Vektor $P\boldsymbol{x}$ ima namreč na vseh koordinatah, ki pripadajo točkam množice C_i konstanto vrednost - ravno i-to koordinato vektorja $\boldsymbol{x}$. Naj bo $\boldsymbol{x}'$ vektor dimenzije $s \times 1$, ki je linearno neodvisen od vektorja $\boldsymbol{x}$. Zaradi pravkar omenjene lastnosti vektorjev $P\boldsymbol{x}$ in $P\boldsymbol{x}'$ se ni težko prepričati, da sta tudi vektorja $P\boldsymbol{x}$ in $P\boldsymbol{x}'$ linearno neodvisna. Po točki (i) je torej vsaka lastna vrednost θ matrike B tudi lastna vrednost matrike A. Poleg tega pa je večkratnost θ kot lastne vrednosti matrike A vsaj tolikšna, kot je večkratnost θ kot lastne vrednosti matrike B. Točka (iii) je tako dokazana. ■

3.2 1-homogeni grafi

Naj bo Γ poljuben graf premera d in naj bo $h \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Izberimo si vozlišči $x, y \in V\Gamma$, za kateri je $\partial(x, y) = h$. Za poljubni števili $i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ definirajmo množico

$$D^i_j = D^i_j(x, y) = \{z \in V\Gamma \mid \partial(x, z) = i,\ \partial(y, z) = j\}.$$

Jasno je, da neprazne množice D^i_j $(0 \leq i, j \leq d)$ sestavljajo particijo množice $V\Gamma$. Prav tako pa iz same definicije množic D^i_j sledi, da je $|D^i_j| = p^h_{ij}$. Definirajmo sedaj h-homogene grafe.

Definicija 3.2.1 *Naj bo Γ graf premera d in $h \in \{0, 1, \ldots, d\}$. Graf Γ je h-homogen, če je za vsak par vozlišč $x, y \in V\Gamma$, za katere je $\partial(x, y) = h$, particija množice $V\Gamma$, ki jo določajo neprazne množice D^i_j $(0 \leq i, j \leq d)$, ekvitabilna, in če parametri teh particij niso odvisni od izbire vozlišč x, y.*

Izmed h-homogenih grafov bodo za nas najpomembnejši 0-homogeni in 1-homogeni grafi. Zato si jih poglejmo podrobneje.

Naj bo Γ 0-homogen graf premera d in $x \in V\Gamma$. Izmed množic $D^i_j = D^i_j(x, x)$ $(0 \leq i, j \leq d)$ so seveda neprazne samo množice D^i_i $(0 \leq i \leq d)$. Te množice pa tvorijo ravno *razdaljno particijo* grafa Γ glede na vozlišče x. Namreč, množica D^i_i je natanko množica tistih vozlišč grafa Γ, ki so na razdalji i od x. Ker je Γ 0-homogen, so vse razdaljne particije ekvitabilne, parametri teh particij pa so neodvisni od izbire vozlišča x. Z drugimi besedami, presečna števila $p^i_{1,i}$ $(0 \leq i \leq d)$, $p^i_{1,i+1}$ $(0 \leq i \leq d-1)$ in $p^i_{1,i-1}$ $(1 \leq i \leq d)$ so neodvisna od izbire vozlišč x in $y \in \Gamma_i(x)$. Zato je produkt $A_1 A_i$ linearna kombinacija matrik $A_0, A_1, \ldots, A_d$ (spomnimo se, da smo z $A_0, A_1, \ldots, A_d$ označili razdaljne matrike grafa Γ). To pa pomeni (glej recimo Godsil [17, Lemma 11.2.1]), da je Γ razdaljno-regularen. Da pa je vsak razdaljno-regularen graf tudi 0-homogen, se prepričamo še lažje. Torej smo dokazali naslednji izrek.

Izrek 3.2.2 *Razdaljno-regularni grafi so natanko 0-homogeni grafi.* ■

Oglejmo si sedaj malo bolj podrobno še 1-homogene grafe. Naj bo Γ 1-homogen graf premera d in $x, y \in V\Gamma$ njegovi sosednji vozlišči. Naj bo $D^i_j = D^i_j(x, y)$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Zaradi trikotniške neenakosti velja, da je $D^i_j = \emptyset$, če je $|i - j| > 1$. Neničelne so torej lahko samo množice D^i_i ter D^{i-1}_i in D^i_{i-1} $(1 \leq i \leq d)$. Moči teh množic podajmo v naslednji lemi, katere dokaz si bralec lahko ogleda v Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Lemma 4.1.7].

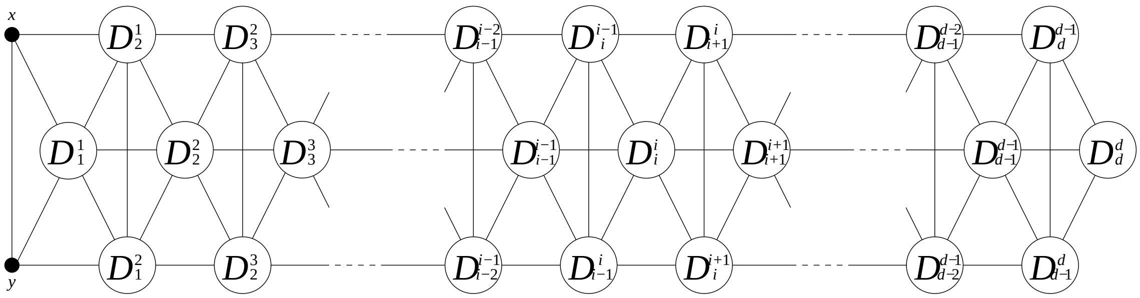
Lema 3.2.3 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf ter $x, y \in V\Gamma$ sosednji vozlišči. Potem za vsak i $(1 \leq i \leq d)$ velja:*

(i) $|D^{i-1}_i| = |D^i_{i-1}| = p^1_{i-1,i} = c_i k_i / k = (b_1 b_2 \ldots b_{i-1})/(c_1 c_2 \ldots c_{i-1})$,

(ii) $|D^i_i| = p^1_{ii} = a_i k_i / k = a_i (b_1 b_2 \cdots b_{i-1})/(c_1 c_2 \ldots c_i)$. ■

Grafično množice D^i_j v primeru 1-homogenega grafa predstavimo na sliki 3.2.
Kot smo že omenili, je vsak 1-homogen graf tudi razdaljno-regularen. Ker je dokaz preprost, ga ponovimo tudi tukaj.

Izrek 3.2.4 (Nomura [38, Lemma 1]) *Vsak 1-homogen graf Γ je razdaljno-regularen.*



Slika 3.2: Razdaljna particija vozlišč grafa glede na par sosednjih vozlišč x, y. Velja $\Gamma_i(x) = D^i_{i-1} \cup D^i_i \cup D^i_{i+1}$ ter $\Gamma_i(y) = D^{i-1}_i \cup D^i_i \cup D^{i+1}_i$ $(1 \leq i \leq d)$.

DOKAZ. Naj bo d premer grafa Γ in naj bosta x in z vozlišči grafa Γ, za kateri je $\partial(x,z) = i$. Naj bo $x = u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i = z$ pot dolžine i med x in z. Definirajmo $D^i_j = D^i_j(x, u_1)$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Potem je $z \in D^i_{i-1}$ in

$$|\Gamma_1(z) \cap \Gamma_{i+1}(x)| = |\Gamma_1(z) \cap D^{i+1}_i|,$$

$$|\Gamma_1(z) \cap \Gamma_i(x)| = |\Gamma_1(z) \cap D^i_{i-1}| + |\Gamma_1(z) \cap D^i_i|,$$

$$|\Gamma_1(z) \cap \Gamma_{i-1}(x)| = |\Gamma_1(z) \cap D^{i-1}_{i-2}| + |\Gamma_1(z) \cap D^{i-1}_{i-1}| + |\Gamma_1(z) \cap D^{i-1}_i|.$$

Ker je Γ 1-homogen, desne strani zgornjih enačb niso odvisne od izbire vozlišč x in z, kar pomeni, da je Γ razdaljno-regularen. ∎

Izreka 3.2.4 pa se ne da posplošiti na h-homogene grafe za $h > 1$. Pot dolžine h $(h > 1)$ je očitno h-homogen graf, vendar pa ni razdaljno-regularen (saj ni niti regularen).

Nekatere parametre particije razdaljno-regularnega grafa Γ, ki je podana na sliki 3.2, lahko izračunamo kar iz njegovih presečnih števil (tudi če Γ ni 1-homogen). Ker bomo te parametre v nadaljevanju večkrat rabili, jih naštejmo v naslednji lemi.

Izrek 3.2.5 (Jurišić, Koolen in Terwilliger [25, Lemma 2.11]) *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d in naj bosta $x, y \in V\Gamma$ sosednji vozlišči. Potem za poljubno naravno število i $(1 \leq i \leq d)$ velja:*

(i) *Vsako vozlišče $z \in D^i_{i-1}$ (oziroma D^{i-1}_i) je sosednje*
   - *(a) natanko* c_{i-1} *vozliščem iz D^{i-1}_{i-2} (oziroma D^{i-2}_{i-1}),*
   - *(b) natanko* $c_i - c_{i-1} - |\Gamma(z) \cap D^{i-1}_{i-1}|$ *vozliščem iz D^{i-1}_i (oziroma D^i_{i-1}),*
   - *(c) natanko* $a_{i-1} - |\Gamma(z) \cap D^{i-1}_{i-1}|$ *vozliščem iz D^i_{i-1} (oziroma D^{i-1}_i),*
   - *(d) natanko* b_i *vozliščem in D^{i+1}_i (oziroma D^i_{i+1}),*
   - *(e) natanko* $a_i - a_{i-1} + |\Gamma(z) \cap D^{i-1}_{i-1}|$ *vozliščem iz D^i_i.*

(ii) *Vsako vozlišče $z \in D^i_i$ je sosednje*

(a) natanko	$c_i - \|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}\|$	*vozliščem iz* D_{i-1}^{i},
(b) natanko	$c_i - \|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}\|$	*vozliščem iz* D_{i}^{i-1},
(c) natanko	$b_i - \|\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}\|$	*vozliščem iz* D_{i}^{i+1},
(d) natanko	$b_i - \|\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}\|$	*vozliščem iz* D_{i+1}^{i},
(e) natanko	$a_i - b_i - c_i +$ $\|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}\| + \|\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}\|$	*vozliščem iz* D_{i}^{i}.

■

3.3 Nekateri rezultati o 1-homogenih grafih

V tem razdelku bomo predstavili nekatere rezultate o 1-homogenih grafih. Navedli bomo nekaj primerov 1-homogenih grafov in podali nekatere zadostne pogoje za 1-homogenost. Začnimo z naslednjo preprosto lemo, katere dokaz zelo elementarno sledi iz izreka 3.2.5.

Lema 3.3.1 (Nomura, [38, Lemma 2]) *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d. Če je $a_i > 0$ kvečjemu za en i $(1 \leq i \leq d)$, potem je Γ 1-homogen.* ■

Kot smo že povedali, je razdaljno-regularen graf Γ s premerom d dvodelen natanko takrat, ko je $a_i = 0$ za vsak i $(1 \leq i \leq d)$. Torej iz leme 3.3.1 meddrugim sledi, da so vsi dvodelni razdaljno-regularni grafi 1-homogeni. Seveda pa obstajajo tudi primeri razdaljno-regularnih grafov, kjer je $a_i \neq 0$ za natanko en i $(1 \leq i \leq d)$. Tak primer je *Welssov graf* (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.2 E]) s premerom $d = 4$ in s presečnim številom $a_2 = 3$.

Tudi vsi razdaljno-regularni grafi stopnje 3 so 1-homogeni (glej Jurišić in Koolen [21, Prop. 3.5]). Izmed teh naštejmo tiste, ki niso dvodelni: Coxeterjev graf (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 10.2]), dodekaeder in Biggs-Smithov graf (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 13.4]).

Oglejmo si še en razred 1-homogenih grafov. Razdaljno-regularen graf Γ premera d je *regularen skoraj-poligon* (ang. regular near-polygon), če zadošča naslednjima zahtevama:

(i) za poljubni sosednji vozlišči $x, y \in V\Gamma$ je $D_1^1(x, y)$ bodisi prazna množica bodisi klika,

(ii) za vsako maksimalno kliko M grafa Γ in za vsako vozlišče $x \in V\Gamma$ z $\partial(M, x) < d$ obstaja enolično določeno vozlišče $v \in M$, tako da velja $\partial(M, x) = \partial(w, x)$.

Takšen graf imenujemo tudi *regularen skoraj* $(2d + 1)$*-gon*, če obstaja tako vozlišče $x \in V\Gamma$ in taka maksimalna klika M, da je $\partial(M, x) = d$. Sicer graf Γ imenujemo regularen skoraj $2d$-gon. Podajmo definicijo regularnih skoraj poligonov še malo drugače. Po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 6.4.1] je razdaljno-regularen graf Γ regularen skoraj-poligon, če ne vsebuje grafa $K_{1,2,1}$ kot induciranega podgrafa in če za njegova presečna števila velja $a_i = c_i a_1$ $(1 \leq i \leq d-1)$. Če je tudi $a_d = c_d a_1$, potem je Γ regularen skoraj $2d$-gon, sicer pa regularen skoraj $(2d+1)$-gon. Primeri regularnih skoraj-poligonov so Hammingovi grafi (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.2]), antipodni kvocienti kock (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.2 D]) in dualni polarni grafi (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.4]). Naslednji izrek je v [38] dokazal Nomura.

Izrek 3.3.2 (Nomura [38, Theorem 1]) *Naj bo Γ takšen razdaljno-regularen graf premera d, za katerega je množica $D_1^1(x,y)$ klika za poljubni dve sosednji vozlišči $x, y \in V\Gamma$. Potem je Γ 1-homogen natanko takrat, ko je regularen $2d$-gon.*

1-homogenost grafa Γ je njegova globalna lastnost. Vendar se v nekaterih primerih da na 1-homogenost grafa Γ sklepati iz povsem lokalnih lastnosti, recimo iz lastnosti njegovih lokalnih grafov. Naslednji rezultat sta dokazala Jurišić in Koolen v [21]. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d. Za vozlišči $x, y \in V\Gamma$, $\partial(x,y) = i$ definirajmo množice $C_i(x,y) = \Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma(y)$, $A_i(x,y) = \Gamma_i(x) \cap \Gamma(y)$ in $B_i(x,y) = \Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma(y)$. Množice $C_i(x,y), A_i(x,y)$ in $B_i(x,y)$ tvorijo particijo lokalnega grafa grafa Γ, ki ga inducirajo sosedi vozlišča y. Rekli bomo, da ima graf Γ lastnost CAB$_j$, če je particija $CAB_i(x,y) = \{C_i(x,y), A_i(x,y), B_i(x,y)\}$ lokalnega grafa ekvitabilna za vsak par vozlišč $x, y \in V\Gamma$, ki sta na razdalji $i \leq j$. Dalje, graf Γ ima lastnost CAB, če ima lastnost CAB$_d$.

Izrek 3.3.3 (Jurišić in Koolen [21, Theorem 3.1]) *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Potem je Γ 1-homogen natanko takrat, ko ima CAB lastnost.* ■

Dokaj hitro se lahko prepričamo tudi v pravilnost naslednjega izreka.

Izrek 3.3.4 *Naj bo Γ 1-homogen graf in $x \in V\Gamma$. Potem je lokalni graf grafa Γ glede na vozlišče x (to je podgraf grafa Γ, ki je induciran z $\Gamma(x)$) bodisi disjunktna unija klik bodisi razdaljno-regularen graf premera 2, torej krepko regularen graf.* ■

Ker poznamo kar precej potrebnih pogojev, katerim morajo zadoščati presečna števila razdaljno-regularnih grafov premera 2, nam izrek 3.3.4 podaja tudi zelo močne potrebne pogoje za parametre 1-homogenega grafa Γ, v primeru ko njegovi lokalni grafi niso izomorfni disjunktni uniji klik.

Poglavje 4

Večkratnost lastne vrednosti razdaljno-regularnega grafa

Znano je, da imajo lastne vrednosti grafov z visoko stopnjo simetrije dokaj veliko večkratnost. Navedimo nekaj primerov. Graf Γ je *tranzitiven po lokih* (oziroma *ločno tranzitiven*), če za poljubna urejena para sosednjih vozlišč (u, v) in (x, y) obstaja tak avtomorfizem φ grafa Γ, da je $\varphi(u) = x$ in $\varphi(v) = y$. Naj bo Γ ločno tranzitiven graf s stopnjo k in naj bo θ njegova lastna vrednost. Biggs je pokazal (glej [2, Proposition 16.7]), da je večkratnost lastne vrednosti θ enaka 1 samo v primeru, ko je $\theta = \pm k$. Biggsov rezultat je nato v [43] posplošil Smith. Urejeni množici $(x_0, x_1, \ldots, x_t)$ vozlišč grafa Γ pravimo *t-lok*, če je vozlišče x_{i-1} sosednje vozlišču x_i za vsak i $(1 \leq i \leq t)$. Za graf Γ pravimo, da je *t-tranzitiven* $(t \in \mathbb{N})$, če njegova grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici t-lokov, in netranzitivno na množici $(t+1)$-lokov. Naj bo Γ regularen t-tranzitiven graf s stopnjo k, θ pa njegova lastna vrednost. Smith je pokazal, da ima lastna vrednost θ večkratnost vsaj $t + 1$, brž ko je $\theta \neq \pm k$.

Podobno se izkaže, da imajo tudi lastne vrednosti razdaljno-regularnih grafov brez trikotnikov dokaj velike večkratnosti. Za induciran podgraf H grafa Γ pravimo da je *geodetičen*, če je razdalja med poljubnima vozliščema grafa H enaka njuni razdalji v grafu Γ. Naj bo sedaj Γ razdaljno-regularen graf brez trikotnikov in naj bo k njegova stopnja. Dalje, naj bo T poljubno geodetično drevo v grafu Γ in θ netrivialna lastna vrednost grafa Γ (torej lastna vrednost grafa Γ, ki ni enaka $\pm k$). Terwilliger [47, Theorem 1] je pokazal, da je večkratnost lastne vrednosti θ večja ali enaka številu listov drevesa T. Izberimo si poljubno vozlišče x grafa Γ, $x_1, \ldots, x_k$ pa naj bodo njegovi sosedi. Ker je graf Γ brez trikotnikov, je podgraf T, ki je induciran z vozlišči $x, x_1, \ldots, x_k$, geodetično drevo s k listi. Torej ima vsaka netrivialna lastna vrednost grafa Γ večkratnost vsaj k. Da pa je ta spodnja meja lahko tudi dosežena, nam povedo naslednji primeri.

(i) Dodekaeder je razdaljno-regularen graf premera 5 s presečno tabelo $\{3, 2, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 2, 3\}$. Je prvi član neskončne družine morebitnih razdaljno-regularnih grafov s presečnimi tabelami $\{2\mu^2 + \mu, 2\mu^2 + \mu - 1, \mu^2, \mu, 1; 1, \mu, \mu^2, 2\mu^2 + \mu -$

$1, 2\mu^2 + \mu\}$, $\mu \in \mathbb{N}$. Če je Γ član te družine, potem ima lastno vrednost $\mu\sqrt{2\mu+3}$ z večkratnostjo $2\mu^2 + \mu$. Dodekaeder ima torej lastno vrednost $\sqrt{5}$ z večkratnostjo 3.

(ii) Razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{21, 20, 16; 1, 2, 12\}$ (coset graph of doubly truncated binary Golay code - glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 11.3]) ima lastno vrednost -11 z večkratnostjo 21.

(iii) Razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{21, 20, 16, 6, 2, 1; 1, 2, 6, 16, 20, 21\}$ (coset graph of once shortened and once truncated binary Golay code - glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 11.3]) ima lastno vrednost -11 z večkratnostjo 21.

(iv) Razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{21, 20, 16, 9, 2, 1; 1, 2, 3, 16, 20, 21\}$ (coset graph of a subcode of the doubly truncated binary Golay code - glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 11.3]) ima spet lastno vrednost -11 z večkratnostjo 21.

Še nekaj primerov razdaljno-regularnih grafov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji, bomo srečali v razdelku 4.2.

Kot se izkaže, imajo razdaljno-regularni grafi brez trikotnikov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa, pogosto dodatne kombinatorične lastnosti. Naprimer, vsi zgoraj našteti grafi so 1-homogeni. V tem poglavju bomo poskusili nakazati, zakaj lastna vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa botruje tem dodatnim kombinatoričnim lastnostim.

V prvem razdelku tega poglavja si bomo pobližje ogledali rezultate Nomure [40] in Yamazakija [51], ki imajo za posledico klasifikacijo vseh dvodelnih razdaljno-regularnih grafov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. V drugem razdelku bomo njune rezultate posplošili na razdaljno-regularne grafe brez trikotnikov in petkotnikov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa (niso pa nujno dvodelni). Podali bomo klasifikacijo teh grafov. Prav tako bomo podali klasifikacijo dvodelnih *skoraj 2-homogenih* razdaljno-regularnih grafov premera $d \geq 4$. V tretjem razdelku pa se bomo posvetili razdaljno-regularnim grafom brez trikotnikov (ki pa imajo petkotnike), ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. Videli bomo, da za nekatere od teh grafov lahko pokažemo, da so 1-homogeni. Rezultati drugega razdelka tega poglavja so povzeti po članku [23], rezultati tretjega razdelka pa po članku [24]. Oba članka sta skupno delo z A. Jurišićem in J. Koolenom.

4.1 Rezultati Nomure in Yamazakija

V člankih [40] in [51] sta Nomura in Yamazaki podala klasifikacijo dvodelnih razdaljno-regularnih grafov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa.

Poglejmo si njune rezultate nekoliko podrobneje. Najprej je Nomura v [40] dokazal naslednji izrek.

Izrek 4.1.1 (Nomura [40, Theorem 1.2]) *Naj bo Γ 2-homogen dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje k in premera d. Potem je presečna tabela grafa Γ enaka enemu od naslednjih tipov:*

(i) $\{k, k-1; 1, k\}$,

(ii) $\{2, 1, \ldots, 1; 1, \ldots, 1, 2\}$,

(iii) $\{k, k-1, \ldots, 3, 2, 1; 1, 2, 3, \ldots, k-1, k\}$,

(iv) $\{k, k-1, 1; 1, k-1, k\}$,

(v) $\{4\gamma, 4\gamma-1, 2\gamma, 1; 1, 2\gamma, 4\gamma-1, 4\gamma\}$, $\gamma \in \mathbb{N}$,

(vi) $\{k, k-1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k\}$, $k = \gamma(\gamma^2+3\gamma+1)$, $c = \gamma(\gamma+1)$, $\gamma \in \mathbb{N}$.

Grafi s presečno tabelo tipa (i) so polni dvodelni grafi. Presečne tabele tipa (ii) pripadajo ciklom, presečne tabele tipa (iii) pa hiperkockam. Grafi s presečno tabelo tipa (iv) so polni dvodelni grafi brez 1-faktorja. Ni se težko prepričati, da so vsi ti grafi 2-homogeni. Grafi s presečno tabelo tipa (v) so *Hadamardovi grafi* (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 1.8]), ki so tesno povezani s Hadamardovimi matrikami. Bralec se lahko o Hadamardovih matrikah poduči, recimo, v Hedayat in Wallis [19]. Da pa so Hadamardovi grafi 2-homogeni, je pokazal Nomura v [39]. Grafi s presečno tabelo tipa (vi) pa so antipodni razdaljno-regularni grafi indeksa 2. Znana sta samo dva predstavnika te družine. Za $\gamma = 1$ dobimo 5-kocko, za $\gamma = 2$ pa dvojni krov Higman-Simsovega grafa. Oba ta dva grafa sta tudi 2-homogena.

Nedolgo za tem rezultatom pa je Yamazaki v [51] dokazal, da je vsak dvodelen razdaljno-regularen graf, ki ima lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa, 2-homogen. Ker imajo vsi grafi, našteti v izreku 4.1.1, lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa, nam ta dva rezultata podata klasifikacijo dvodelnih razdaljno-regularnih grafov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. Nomura in Yamazaki sta torej skupaj v bistvu dokazala naslednji izrek.

Izrek 4.1.2 *Naj bo Γ dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje k in premera d. Potem so ekvivalentne trditve* (i)–(iii).

(i) *Graf Γ je 2-homogen.*

(ii) *Graf Γ ima lastno vrednost z večkratnostjo k.*

(iii) *Graf Γ ima presečno tabelo enako eni izmed presečnih tabel, podanih v izreku* 4.1.1. ■

Poleg tega pa nam Yamazakijev rezultat zagotovi, da so tudi grafi s presečno tabelo tipa (vi) iz izreka 4.1.1 2-homogeni.

Prej kot se posvetimo dokazovanju rezultatov, navedimo še naslednjo definicijo. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 2$ in naj bo $r \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Pravimo, da parameter γ_r obstaja za graf Γ, če je

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \cap \Gamma_{r-1}(z)| = \gamma_r$$

za poljubna vozlišča x, y, z grafa Γ, za katera velja $\partial(x, z) = \partial(y, z) = r$ in $\partial(x, y) = 2$. Če je graf Γ dvodelen, potem se ni težko prepričati, da je Γ 2-homogen natanko takrat, ko parametri γ_r obstajajo za vsak $r \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$. Opomnimo še, da je parameter γ_1 vedno enak 1, ter da v primeru, ko je Γ dvodelen graf premera d, parameter γ_d vedno obstaja in je enak presečnemu številu c_2.

4.2 Grafi brez trikotnikov in petkotnikov

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf brez trikotnikov, ki ima lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. Izkaže se, da je dolžina najkrajšega cikla v grafu Γ kvečjemu 5, glej lemo 4.2.4(iv). Zato lahko povsem naravno ločimo tri možnosti glede na vrednost presečnih števil c_2 in a_2: $a_2 = 0$ in $c_2 \geq 2$, $a_2 \geq 1$ in $c_2 = 1$ ter $a_2 \geq 1$ in $c_2 \geq 2$. Medtem ko sta zadnji dve možnosti zaenkrat še pretežki za podrobnejšo obravnavo, pa je prva možnost tista, s katero se bomo ukvarjali v tem razdelku.

Posplošili bomo namreč rezultat Nomure in Yamazakija, ki smo ga predstavili v razdelku 4.1. Podali bomo klasifikacijo razdaljno-regularnih grafov brez trikotnikov in petkotnikov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. Kot bomo videli, dobimo rezultat, ki je skoraj identičen klasifikaciji Nomure in Yamazakija. Nedvodelni razdaljno-regularni grafi brez trikotnikov in petkotnikov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa, so namreč natanko cikli lihe dolžine večje ali enake 7 in antipodni kvocienti k-kock, kjer je k liho število večje ali enako 7. Opozorimo še na to, da je razdaljno-regularen graf Γ brez trikotnikov in petkotnikov natanko takrat, ko sta presečni števili a_1 in a_2 grafa Γ enaki 0. Naš glavni rezultat je naslednji izrek.

Izrek 4.2.1 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje k in premera d ter s presečnima številoma $a_1 = a_2 = 0$. Graf Γ ima lastno vrednost z večkratnostjo k natanko takrat, ko je Γ eden od naslednjih grafov:*

(i) *n-cikel ($n \geq 6$) s presečno tabelo* $\{2, 1, \ldots, 1; 1, \ldots, 1, 2\}$,

(ii) *k-kocka ($k \geq 2$) s presečno tabelo* $\{k, k-1, \ldots, 3, 2, 1; 1, 2, 3, \ldots, k-1, k\}$,

(iii) *poln dvodelen graf brez 2-faktorja s presečno tabelo* $\{k, k-1, 1; 1, k-1, k\}$, $k \geq 3$,

(iv) *Hadamardov graf s presečno tabelo* $\{4\gamma, 4\gamma-1, 2\gamma, 1; 1, 2\gamma, 4\gamma-1, 4\gamma\}$, $\gamma \in \mathbb{N}$,

(v) *razdaljno-regularen graf s presečno tabelo* $\{k, k-1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k\}$, $k = \gamma(\gamma^2 + 3\gamma + 1)$, $c = \gamma(\gamma + 1)$, $\gamma \in \mathbb{N}$,

(vi) *antipodni kvocient* k*-kocke* (k *liho*, $k \geq 7$) *s presečno tabelo* $\{k, k-1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor + 2; 1, 2, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$.

Preden se lotimo dokazovanja izreka, navedimo še nekaj terminologije in rezultatov, ki jih bomo rabili v nadaljevanju. Povezan graf se imenuje *rektagraf*, če je brez trikotnikov in če imata poljubni dve vozlišči, ki sta na razdalji 2, natanko 2 skupna soseda. Po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 1.1.2] je vsak rektagraf regularen. Naj bo Γ poljuben graf. Podgraf H grafa Γ bomo imenovali s*-krempelj* grafa Γ ($s \in \mathbb{N}$), če je izomorfen polnemu dvodelnemu grafu $K_{1,s}$. Naslednja lema bo igrala pomembno vlogo pri našem raziskovanju v tem razdelku.

Lema 4.2.2 *Naj bo* Γ *rektagraf stopnje* k, *v katerem je vsak* 3*-krempelj vsebovan v enolično določeni* 3*-kocki. Naj bo* Δ k*-kocka in* $x \in V\Delta$. *Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) *Obstaja preslikava* $\pi : V\Delta \to V\Gamma$, *ki ohranja razdalje* $0, 1$ *in* 2. *Če* Γ *ne vsebuje petkotnikov, potem* π *ohranja tudi razdalje* 3.

(ii) *Zožitev preslikave* π *na množico vozlišč* $\{x\} \cup \Delta(x)$ *preslika* $\{x\} \cup \Delta(x)$ *bijektivno na* $\{\pi(x)\} \cup \Gamma(\pi(x))$.

(iii) *Preslikava* π *je surjektivna.*

(iv) *Če sta* x' *in* y' *sosednji vozlišči grafa* Γ, *potem je vsako vozlišče v* $\pi^{-1}(x')$ *sosednje natanko enemu vozlišču iz* $\pi^{-1}(y')$. *Torej je tudi moč množice* $\pi^{-1}(x')$ *enaka moči množice* $\pi^{-1}(y')$.

DOKAZ. (i) Glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 4.3.6].

(ii) Ker preslikava π ohranja razdaljo 1, je $\pi(y) \in \Gamma(\pi(x))$ za vsak $y \in \Delta(x)$. Ker pa je Δ brez trikotnikov in ker π ohranja tudi razdalje 2, je zožitev preslikave π na množico $\{x\} \cup \Delta(x)$ injektivna. Množici $\{x\} \cup \Delta(x)$ in $\{\pi(x)\} \cup \Gamma(\pi(x))$ pa sta seveda končni ter enako močni, torej je zožitev preslikave π na množico $\{x\} \cup \Delta(x)$ tudi surjektivna.

(iii) Recimo, da preslikava π ni surjektivna. Ker je graf Γ povezan, obstaja tako vozlišče $y \in V\Delta$, da vsaj eden od sosedov vozlišča $\pi(y) \in V\Gamma$ ni slika nobenega vozlišča grafa Δ. To pa pomeni, da zožitev preslikave π na množico $\{y\} \cup \Delta(y)$ ni bijekcija, kar je v protislovju s točko (ii).

(iv) Glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 4.3.7]. ■

Naj bosta ℓ in n naravni števili in naj bodo $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ vektorji evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$. *Gramova matrika* vektorjev $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ je matrika G dimenzije $\ell \times \ell$, definirana z

$$G_{ij} = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \quad (1 \leq i, j \leq \ell).$$

Znano je, da so vektorji $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ linearno neodvisni natanko takrat, ko je determinanta njihove Gramove matrike različna od 0.

4.2.1 Večkratnost lastnih vrednosti

V tem podrazdelku bomo dokazali nekaj rezultatov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Kot bomo videli, pa ti rezultati tudi motivirajo naše raziskovanje razdaljno-regularnih grafov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. Dokazali bomo, da imajo razdaljno-regularni grafi, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa, dodatne kombinatorične lastnosti. Bolj natančno, dokazali bomo, da v primeru, ko je tak graf brez trikotnikov in petkotnikov, parameter γ_2 obstaja. To pa je seveda prva stopnička na poti proti 2-homogeni lastnosti. Začnimo z naslednjo preprosto lemo.

Lema 4.2.3 *Naj bo n naravno število, I identična matrika dimenzije $n \times n$ in J matrika iz samih enic, prav tako dimenzije $n \times n$. Naj bosta a in b poljubni realni števili. Potem je*

$$\det(aI + bJ) = a^{n-1}(a + nb).$$

DOKAZ. Ker trditev očitno drži za $b = 0$, privzemimo da je $b \neq 0$. Vemo, da je determinanta matrike enaka produktu njenih lastnih vrednosti. Kaj pa so lastne vrednosti matrike $aI + bJ$? Naj bo $\boldsymbol{x}$ lastni vektor matrike $aI + bJ$ za lastno vrednost λ. Torej je $(aI + bJ)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. To pa je ekvivalentno enačbi $(\lambda - a)\boldsymbol{x} = b\langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{x}\rangle \boldsymbol{j}$, kjer je $\boldsymbol{j}$ vektor iste dimenzije kot $\boldsymbol{x}$, sestavljen iz samih enic. Če je $\lambda \neq a$, potem je vektor $\boldsymbol{x}$ večkratnik vektorja $\boldsymbol{j}$. Torej ima matrika $aI + bJ$ kvečjemu eno lastno vrednost različno od a, njena večkratnost pa je v tem primeru 1. Vse ostale lastne vrednosti so torej enake a, zato je a lastna vrednost matrike $aI + bJ$ z večkratnostjo $n - 1$ ali n. Vemo pa tudi, da je vsota lastnih vrednosti matrike enaka sledi matrike. Sled matrike $aI + bJ$ je enaka $n(a + b)$. Ker je $b \neq 0$, mora biti torej vsaj ena lastna vrednost matrike $aI + bJ$ različna od a. Označimo to lastno vrednost z λ. Iz enačbe $(n - 1)a + \lambda = n(a + b)$ naposled dobimo $\lambda = a + nb$. Lema je tako dokazana. ■

Lema 4.2.4 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$ in s presečnim številom $a_1 = 0$. Naj bo $\theta \neq \pm k$ njegova lastna vrednost in E pripadajoči glavni idempotent. Z m_θ označimo večkratnost lastne vrednosti θ. Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) $m_\theta \geq k$,

(ii) $\theta \neq 0$ *natanko takrat, ko ima* $\langle \Gamma(x) \rangle_E$ *dimenzijo* k *za vsako vozlišče* $x \in V\Gamma$,

(iii) *če je* $\theta = 0$, *potem ima* $\langle (\{x\} \cup \Gamma(x)) \setminus \{y\} \rangle_E$ *dimenzijo* k *za vsak* $x \in V\Gamma$ *in vsak* $y \in \Gamma(x)$,

(iv) *če je* $m_\theta = k$, *potem je dolžina najkrajšega cikla v* Γ *največ* 5.

DOKAZ. (i) Neposredno iz Terwilligerjevega rezultata [47, Theorem 1] (glej tudi uvod v to poglavje).

(ii) Naj bo x poljubno vozlišče grafa Γ. Vozlišča $\{y_1, \ldots, y_k\}$ naj bodo sosedi vozlišča x, G pa naj bo Gramova matrika vektorjev $Ey_1, \ldots, Ey_k$. Naj bo $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ zaporedje dualnih lastnih vrednosti, ki pripada glavnemu idempotentu E. Ker je Γ brez trikotnikov, je $\partial(y_i, y_j) = 2$ $(1 \leq i, j \leq k)$ brž ko je $i \neq j$. Zato po lemi 2.3.5(i) dobimo

$$G = \frac{m_\theta}{|V\Gamma|}(I_k + \theta_2^*(J_k - I_k)) = \frac{m_\theta}{|V\Gamma|}((1 - \theta_2^*)I_k + \theta_2^* J_k),$$

kjer je I_k identična matrika dimenzije $k \times k$, J_k pa matrika sestavljena iz samih enic, prav tako dimenzije $k \times k$. Po lemi 4.2.3 je determinanta matrike G enaka

$$\det(G) = \left(\frac{m_\theta}{|V\Gamma|}\right)^k (1 - \theta_2^*)^{k-1}(1 + (k-1)\theta_2^*).$$

Determinanta matrike G je torej enaka 0 natanko takrat, ko $\theta_2^* \in \{1, 1/(1-k)\}$. Ker je presečno število a_1 grafa Γ enako 0, po lemi 2.3.5(ii) dobimo $\theta_2^* = (\theta^2 - k)/(k(k-1))$. Če je $\theta_2^* = 1$, potem je $\theta = \pm k$, kar po predpostavkah leme ni mogoče. Če pa je $\theta_2^* = 1/(1-k)$, dobimo $\theta = 0$. Torej je determinanta matrike G različna od 0 natanko takrat, ko je $\theta \neq 0$. Zato so vektorji $Ey_1, \ldots, Ey_k$ linearno neodvisni (in ima vektorski podprostor $\langle\Gamma(x)\rangle_E$ dimenzijo k) natanko takrat, ko je $\theta \neq 0$.

(iii) Naj bo $\theta = 0$. Iz leme 2.3.5(ii) v tem primeru dobimo $\theta_1^* = 0$ in $\theta_2^* = 1/(1-k)$. Naj bo x poljubno vozlišče grafa Γ in $\Gamma(x) = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo $y = y_k$. Naj bo G Gramova matrika vektorjev $Ex, Ey_1, \ldots, Ey_{k-1}$. Po lemi 2.3.5(i) dobimo

$$G = \frac{m_\theta}{|V\Gamma|}\begin{pmatrix} 1 & \theta_1^* & \theta_1^* & \cdots & \theta_1^* \\ \theta_1^* & 1 & \theta_2^* & \cdots & \theta_2^* \\ \theta_1^* & \theta_2^* & 1 & \cdots & \theta_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^* & \theta_2^* & \theta_2^* & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ker je $\theta_1^* = 0$, je

$$\det(G) = (m_\theta/|V\Gamma|)^k \det(I_{k-1} + \theta_2^*(J_{k-1} - I_{k-1})) =$$

$$(m_\theta/|V\Gamma|)^k \det((1 - \theta_2^*)I_{k-1} + \theta_2^* J_{k-1}),$$

kjer sta I_{k-1} in J_{k-1} identična matrika in matrika samih enic, obe dimenzije $(k-1) \times (k-1)$. Po lemi 4.2.3 je zato

$$\det(G) = (m_\theta/|V\Gamma|)^k (1 - \theta_2^*)^{k-2}(1 + (k-2)\theta_2^*).$$

Ker pa je $\theta_2^* = 1/(1-k) \neq 1$, je $\det(G) \neq 0$. Vektorji $Ex, Ey_1, \ldots, Ey_{k-1}$ so torej linearno neodvisni.

(iv) Predpostavimo, da je $m_\theta = k$, dolžina najkrajšega cikla v grafu Γ pa večja od 5. Torej za presečna števila grafa Γ velja $a_1 = a_2 = 0$ in $c_2 = 1$. Izberimo si $x \in V\Gamma$ ter $y \in \Gamma(x)$. Naj bo T podgraf grafa Γ, induciran z $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$. Ni se težko prepričati, da je T geodetično drevo v Γ, zato je večkratnost $m_\theta = k$ večja ali enaka številu listov drevesa T. Toda drevo T ima $2(k-1) > k$ listov, kar pa je seveda protislovje! Lema je tako dokazana. ∎

V naslednji lemi bomo pokazali, da imajo razdaljno-regularni grafi brez trikotnikov in petkotnikov, ki imajo lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji, dodatne kombinatorične lastnosti. Pokazali bomo namreč, da za takšne grafe parameter γ_i obstaja, brž ko je $a_i = 0$ $(1 \le i \le d-1)$.

Lema 4.2.5 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje $k \ge 3$, premera $d \ge 3$ in s presečnima številoma $a_1 = a_2 = 0$. Naj bo θ njegova lastna vrednost z večkratnostjo k. Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) $c_2 \ge 2$.

(ii) $\theta \ne 0$.

(iii) *Za vsak i $(1 \le i \le d-1)$ za katerega je $a_i = 0$, obstaja parameter γ_i. Pri tem je*

$$\gamma_2 = \frac{(k-\theta^2)(2c_2-k) + c_2^2(\theta^2-1)}{\theta^2(k-1)}.$$

DOKAZ. Naj bo E glavni idempotent grafa Γ, prirejen lastni vrednosti θ.

(i) Če bi bil $c_2 = 1$, potem bi imel najkrajši cikel v grafu Γ dolžino večjo od 5, kar pa po lemi 4.2.4(iv) ni mogoče.

(ii) Privzemimo, da je $\theta = 0$. Ker je $a_1 = a_2 = 0$, dobimo iz leme 2.3.5(ii) $\theta_1^* = \theta_3^* = 0$ in $\theta_2^* = 1/(1-k)$. Naj bo $x \in V\Gamma$ in naj bo $\Gamma(x) = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Po lemi 4.2.4(iii) so vektorji $Ex, Ey_1, \ldots, Ey_{k-1}$ baza vektorskega podprostora $\langle(\{x\} \cup \Gamma(x)) \setminus \{y_k\}\rangle_E$. Ker je večkratnost lastne vrednosti θ enaka k, je dimenzija njenega lastnega podprostora tudi enaka k. Ker pa so vektorji $Ex, Ey_1, \ldots, Ey_{k-1}$ lastni vektorji za lastno vrednost θ, je $\langle(\{x\} \cup \Gamma(x)) \setminus \{y_k\}\rangle_E$ enak lastnemu podprostoru lastne vrednosti θ.

Naj bo z sosed vozlišča y_k, $z \ne x$. Ker je Ez tudi lastni vektor za lastno vrednost θ, obstajajo taka realna števila α_i $(1 \le i \le k-1)$ in δ, da velja

$$Ez = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i E y_i + \delta E x. \tag{4.1}$$

Ker je $\partial(x,z) = 2$, ima z v množici $\Gamma(x)$ poleg y_k še $c_2 - 1$ sosedov. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da so to vozlišča $y_1, \ldots, y_{c_2-1}$. Ker je presečno število $a_2 = 0$, je $\partial(z, y_i) = 3$ za $c_2 \le i \le k-1$. Če enačbo (4.1) skalarno pomnožimo z $(|V\Gamma|/k)Ey_j$ $(1 \le j \le k-1)$ in uporabimo lemo 2.3.5(i), dobimo enačbe

$$0 = \theta_2^* \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i - \alpha_j \theta_2^* + \alpha_j \quad (1 \leq j \leq k-1), \tag{4.2}$$

saj je $\theta_1^* = \theta_3^* = 0$. Če pa enačbo (4.1) skalarno pomnožimo z $(|V\Gamma|/k)Ey_k$, dobimo še

$$0 = \theta_1^* = \theta_2^* \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i.$$

Iz zgornjih dveh enačb pa očitno sledi, da je $\alpha_i = 0$ za $1 \leq i \leq k-1$, saj je $\theta_2^* = 1/(1-k) \neq 1$. Torej je

$$Ez = \delta Ex.$$

Ker imata vektorja Ex in Ez enako dolžino ($\langle Ex, Ex\rangle = \langle Ez, Ez\rangle$), je $\delta = \pm 1$, torej $Ez = \pm Ex$. Če pa sedaj izračunamo skalarni produkt $|V\Gamma|/k\langle Ex, Ez\rangle$, dobimo $1/(1-k) = \theta_2^* = \pm 1$. Torej $k \in \{0, 2\}$, kar pa je protislovje. Lastna vrednost θ je zato različna od 0.

(iii) Naj bo i $(1 \leq i \leq d-1)$ tako naravno število, da je $a_i = 0$. Izberimo poljubni vozlišči $x, y \in V\Gamma$, ki sta na razdalji 2, in $z \in D_i^i(x, y)$. Ker je $\gamma_1 = 1$, lahko privzamemo $i \geq 2$. Naj bo $\Gamma(x) = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Ker je $\partial(x, y) = 2$, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \{y_1, \ldots, y_{c_2}\}$. Ker je $a_2 = 0$, je $\partial(y, y_j) = 3$ za $c_2 + 1 \leq j \leq k$. Po točki (ii) je $\theta \neq 0$. Ker je Ey lastni vektor za θ in ker so vektorji $Ey_1, \ldots, Ey_k$ po lemi 4.2.4(ii) baza lastnega podprostora lastne vrednosti θ, obstajajo taka realna števila α_j $(1 \leq j \leq k)$, da je

$$Ey = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j Ey_j. \tag{4.3}$$

Če enačbo (4.3) skalarno pomnožimo z Ey_ℓ $(1 \leq \ell \leq k)$, ugotovimo (podobno kot pri dokazu točke (ii)), da je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{c_2}$ in $\alpha_{c_2+1} = \cdots = \alpha_k$. Označimo $\alpha = \alpha_1$ in $\beta = \alpha_k$. Tako dobimo

$$\theta_2^* = \frac{|V\Gamma|}{k}\langle Ey, Ex\rangle = \theta_1^*(\alpha c_2 + \beta(k - c_2))$$

in

$$\theta_1^* = \frac{|V\Gamma|}{k}\langle Ey, Ey_1\rangle = \alpha + \theta_2^*(\alpha(c_2 - 1) + \beta(k - c_2)).$$

Ker je $\theta_1^* = \theta/k \neq 0$, $\theta_2^* = (\theta^2 - k)/(k(k-1)) \neq 1$ in $k \neq c_2$, dobimo od tod

$$\alpha = \frac{(\theta_1^* - \theta_2^*)(\theta_1^* + \theta_2^*)}{\theta_1^*(1 - \theta_2^*)} \quad \text{in} \quad \beta = \frac{\theta_2^*(\theta_2^* - 1) + c_2(\theta_1^* - \theta_2^*)(\theta_1^* + \theta_2^*)}{(k - c_2)\theta_1^*(\theta_2^* - 1)}.$$

Naj bo $\gamma = \gamma(x, y, z)$ moč množice $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \cap \Gamma_{i-1}(z)$. Zopet lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \cap \Gamma_{i-1}(z) = \{y_1, \ldots, y_\gamma\}$. Hitro opazimo, da zaradi trikotniške neenakosti in $a_i = 0$ velja $\partial(z, y_j) = i+1$ za $\gamma+1 \le j \le c_2$. Ker je $|\Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(z)| = c_i$, lahko privzamemo, da je $\partial(z, y_j) = i-1$ za $c_2+1 \le j \le c_2+c_i-\gamma$. Podobno kot prej nam $a_i = 0$ zagotavlja, da je $\partial(z, y_j) = i+1$ za $c_2+c_i-\gamma+1 \le j \le k$. Torej dobimo

$$\theta_i^* = \frac{|V\Gamma|}{k}\langle Ey, Ez\rangle =$$

$$= \alpha\gamma\theta_{i-1}^* + \alpha(c_2-\gamma)\theta_{i+1}^* + \beta(c_i-\gamma)\theta_{i-1}^* + \beta(k-c_2-c_i+\gamma)\theta_{i+1}^*. \qquad (4.4)$$

Enačba (4.4) je linearna enačba za γ, s koeficientom pri γ enakim $(\alpha-\beta)(\theta_{i-1}^*-\theta_{i+1}^*)$. Ali je ta koeficient lahko enak 0? Ker je $\alpha-\beta = \theta/(k-c_2)$ in ker je $\theta \neq 0$, je tudi $\alpha-\beta \neq 0$. Ali je lahko $\theta_{i-1}^* - \theta_{i+1}^* = 0$? V tem primeru najprej iz leme 2.3.5(ii) dobimo (ker je $a_i = 0$)

$$\theta\theta_i^* = c_i\theta_{i-1}^* + b_i\theta_{i+1}^* = k\theta_{i+1}^*,$$

od tod pa $\theta_1^*\theta_i^* = \theta_{i+1}^*$. Ker pa je $\alpha c_2 + \beta b_2 = \theta_2^*/\theta_1^*$, dobimo iz enačbe (4.4) še $\theta_i^* = \theta_2^*\theta_{i+1}^*/\theta_1^*$. Torej imamo

$$\theta_2^*\theta_{i+1}^* = \theta_1^*\theta_i^* = \theta_{i+1}^*.$$

Če bi bil $\theta_{i+1}^* = 0$, potem je tudi $\theta_{i-1}^* = \theta_{i+1}^* = 0$. Iz leme 2.3.5(ii) dobimo še $\theta_i^* = 0$, saj je $\theta \neq 0$. Sedaj pa iz leme 2.3.5(ii) z rekurzijo dobimo $\theta/k = \theta_1^* = 0$, kar pa je protislovje. Torej je $\theta_{i+1}^* \neq 0$ in zato $\theta_2^* = 1$. To pa pomeni $\theta = \pm k$, kar pa je nemogoče, ker je večkratnost lastne vrednosti θ enaka k. Koeficient $(\alpha-\beta)(\theta_{i-1}^*-\theta_{i+1}^*)$ je torej različen od 0, zato lahko γ izračunamo iz enačbe (4.4). To pa seveda pomeni, da γ ni odvisen od izbire vozlišč x, y, z. Torej parameter γ_i grafa Γ obstaja.
Formulo za γ_2 dobimo neposredno iz enačbe (4.4) za $i = 2$. Lema je tako dokazana. ■

Prej kot preidemo na dokaz glavnega izreka tega razdelka, dokažimo še naslednjo lemo. Njen dokaz je povzet po dokazu leme Nomura [40, Lemma 5.1].

Lema 4.2.6 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje $k \ge 3$, premera $d \ge 3$ in s presečnima številoma $a_1 = a_2 = 0$. Izberimo si naravno število i $(2 \le i \le d-1)$, tako da je $a_i = 0$ in da parameter γ_i obstaja. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) *če je $i = 2$, potem je $(k-2)(\gamma_2-1) = (c_2-1)(c_2-2)$,*

(ii) *$\gamma_i(c_{i+1}-1) = c_i(c_2-1)$.*

DOKAZ. (i) Naj bo u poljubno vozlišče grafa Γ in naj bosta $v \in \Gamma(u)$ in $w \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma(v)$. Preštejmo povezave med množicama $M_1 = \Gamma(u) \cap \Gamma(w) \cap \Gamma_2(v)$ in $M_2 = \Gamma(v) \cap \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$ na dva različna načina. Najprej, množica M_1 ima c_2-1 vozlišč. Vsako izmed teh vozlišč je na razdalji 2 od v, torej ima z vozliščem v natanko c_2 skupnih sosedov. Razen vozlišč u in w, morajo biti vsi ostali skupni sosedi vsebovani v množici M_2. Torej ima vsako vozlišče iz M_1 v M_2 natanko c_2-2 sosedov. Po drugi strani pa je v množici M_2 natanko $b_1-1 = k-2$ vozlišč. Vsako od njih ima v množici

M_1 natanko $\gamma_2 - 1$ sosedov. Namreč, vozlišča iz M_2 so na razdalji 2 od u in w, zato morajo imeti med skupnimi sosedi vozlišč u in w natanko γ_2 sosedov. Eden od teh je v, ostali pa morajo biti vsebovani v množici M_1.

(ii) Izberimo si poljubno vozlišče u grafa Γ ter sosednji vozlišči $v \in \Gamma_i(u)$ in $w \in \Gamma_{i+1}(u)$. Podobno kot pri dokazu točke (i) preštejmo na dva različna načina povezave med množicama $\Gamma_{i-1}(u) \cap \Gamma(v)$ in $\Gamma_i(u) \cap \Gamma(w) \cap \Gamma_2(v)$. V množici $\Gamma_{i-1}(u) \cap \Gamma(v)$ je natanko c_i vozlišč, od katerih ima vsako v množici $\Gamma_i(u) \cap \Gamma(w) \cap \Gamma_2(v)$ natanko $c_2 - 1$ sosedov. Po drugi strani pa je v množici $\Gamma_i(u) \cap \Gamma(w) \cap \Gamma_2(v)$ natanko $c_{i+1} - 1$ vozlišč, od katerih ima vsako v množici $\Gamma_{i-1}(u) \cap \Gamma(v)$ natanko γ_i sosedov. ■

4.2.2 Klasifikacija

V tem podrazdelku bomo dokazali glavni rezultat tega razdelka, to je izrek 4.2.1. Še enkrat se spomnimo, da smo vozlišča poljubnega grafa Δ identificirali s standardno ortonormirano bazo evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, kjer je $n = |V\Delta|$. Naj bo x poljubno vozlišče grafa Δ. Za poljuben vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ bomo z $\boldsymbol{v}_x = \langle \boldsymbol{v}, x \rangle$ označili tisto komponento vektorja $\boldsymbol{v}$, ki pripada vozlišču x. Pri dokazovanju izreka 4.2.1 bomo potrebovali naslednja dva rezultata, ki pa sta zanimiva tudi sama po sebi.

Izrek 4.2.7 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ in s presečnimi števili $a_1 = a_2 = 0$ ter $c_i = i$ za $i \in \{1, 2, 3\}$. Potem ima Γ lastno vrednost $\theta \in \{k-2, 2-k\}$ natanko takrat, ko je izomorfen k-kocki, ali ko je k liho število večje ali enako 7 in je izomorfen antipodnemu kvocientu k-kocke.*

Dokaz. Če je Γ izomorfen k-kocki, potem sta $k-2$ in $2-k$ njegovi lastni vrednosti, obe z večkratnostjo k (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 9.2.1]). Če pa je Γ izomorfen antipodnemu kvocientu k-kocke, kjer je k liho število večje ali enako 7, potem ima Γ lastno vrednost $2-k$, ki je tudi večkratnosti k (glej Brouwer, Cohen in Neumaier[4, stran 264]). Privzemimo sedaj, da ima Γ lastno vrednost $\theta \in \{k-2, 2-k\}$. Ker je Γ rektagraf s $c_3 = 3$ in $a_2 = 0$, je po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Lemma 4.3.5(ii)] vsak 3-krempelj v Γ vsebovan v enolično določeni 3-kocki. Iz leme 4.2.2(i) zato sledi, da obstaja preslikava π vozlišč k-kocke Δ v vozlišča grafa Γ, ki ohranja razdalje $0, 1, 2$ in 3. Naj bo $\Pi = \{\pi^{-1}(x) \mid x \in V\Gamma\}$. Ker je preslikava π surjektivna (lema 4.2.2(iii)), je Π particija vozlišč grafa Δ. Po lemi 4.2.2(iv) je particija Π ekvitabilna, kvocientni graf Δ/Π pa je očitno graf Γ. Izberimo si $x_0 \in V\Gamma$ in naj bo $C_0 = \pi^{-1}(x_0)$. Za vsako naravno število i $(1 \leq i \leq d)$ definirajmo

$$C_i = \bigcup_{\substack{x \in V\Gamma \\ \partial(x_0, x) = i}} \pi^{-1}(x).$$

Po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Lemma 11.1.4] je $C_i = \{\overline{x} \in V\Delta \mid \partial(\overline{x}, C_0) = i\}$, kjer je $\partial(\overline{x}, C_0) = \min\{\partial(\overline{x}, \overline{y}) \mid \overline{y} \in C_0\}$.

Naj bo $\theta_0^*(\Gamma), \theta_1^*(\Gamma), \ldots, \theta_d^*(\Gamma)$ zaporedje dualnih lastnih vrednosti grafa Γ, pripadajoče lastni vrednosti θ. Število θ pa je tudi lastna vrednost grafa Δ z večkratnostjo k. Naj bo $\theta_0^*(\Delta), \theta_1^*(\Delta), \ldots, \theta_k^*(\Delta)$ zaporedje dualnih lastnih vrednosti grafa

Δ, pripadajoče lastni vrednosti θ. Dalje, naj bo $n = |V\Gamma|$. Definirajmo sedaj vektor $\overline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^{2^k}$, ki bo lastni vektor grafa Δ za lastno vrednost θ. Najprej po lemi 2.3.5(ii) dobimo, da je vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, definiran z

$$\boldsymbol{v}_x = \theta_i^*(\Gamma) \iff \partial(x_0, x) = i \quad (x \in V\Gamma),$$

lastni vektor grafa Γ za lastno vrednost θ. Vektor $\overline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^{2^k}$, definiran z

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{\overline{x}} = \frac{k}{2^k}\theta_i^*(\Gamma) \iff \overline{x} \in C_i,$$

pa je zato po izreku 3.1.3(i) lastni vektor grafa Δ za lastno vrednost θ.

Izberimo si sedaj $\overline{x_0} \in C_0$ in naj bodo $\overline{x_i}$ $(1 \le i \le k)$ njegovi sosedi. Ker π ohranja sosednost, je $\overline{x_i} \in C_1$ $(1 \le i \le k)$. Naj bo E glavni idempotent grafa Δ, ki pripada lastni vrednosti θ. Pokažimo, da je $\overline{\boldsymbol{v}} = E(\overline{x_0})$. Ker je $\overline{\boldsymbol{v}}$ lastni vektor grafa Δ za lastno vrednosti θ, je $E(\overline{\boldsymbol{v}}) = \overline{\boldsymbol{v}}$. Lema 4.2.4(ii) nam zagotavlja, da so vektorji $E(\overline{x_i})$ $(1 \le i \le k)$ baza lastnega podprostora $E\mathbb{R}^{2^k}$, ki pripada lastni vrednosti θ. Po lemi 2.3.5 imamo

$$\langle E(\overline{x_0}), E(\overline{x_i})\rangle = \frac{k}{2^k}\theta_1^*(\Delta) = \frac{k}{2^k}\frac{\theta}{k} \quad (1 \le i \le k).$$

Po drugi strani pa po definiciji vektorja $\overline{\boldsymbol{v}}$ dobimo

$$\langle \overline{\boldsymbol{v}}, E(\overline{x_i})\rangle = \langle E(\overline{\boldsymbol{v}}), \overline{x_i}\rangle = \langle \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{x_i}\rangle = \overline{\boldsymbol{v}}_{\overline{x_i}} = \frac{k}{2^k}\theta_1^*(\Gamma) = \frac{k}{2^k}\frac{\theta}{k} \quad (1 \le i \le k).$$

Ker se skalarni produkti vektorjev $\overline{\boldsymbol{v}}$ in $E(\overline{x_0})$ z baznimi vektorji $E(\overline{x_i})$ $(1 \le i \le k)$ ujemajo, je $\overline{\boldsymbol{v}} = E(\overline{x_0})$.
Če je $\overline{x} \in C_0$, potem po definiciji vektorja $\overline{\boldsymbol{v}}$ velja $\overline{\boldsymbol{v}}_{\overline{x}} = k\theta_0^*(\Gamma)/2^k = k/2^k$. Torej je

$$C_0 \subseteq \{\overline{x} \in V\Delta \mid \overline{\boldsymbol{v}}_{\overline{x}} = E(\overline{x_0})_{\overline{x}} = \frac{k}{2^k}\}.$$

Ker pa je $E = (k/2^k)\sum_{i=0}^k \theta_i^*(\Delta)A_i$, kjer so A_i razdaljne matrike grafa Δ, je $E(\overline{x_0})_{\overline{x}} = (k/2^k)\theta_i^*(\Delta)$ natanko takrat, ko je $\partial(\overline{x_0}, \overline{x}) = i$. Po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 4.4.7] je lahko dualna lastna vrednost $\theta_i^*(\Delta)$ enaka 1 samo v primeru, ko je $i = 0$ ali $i = k$. Zato je množica $\{\overline{x} \in V\Delta \mid E(\overline{x_0})_{\overline{x}} = (k/2^k)\}$ enaka bodisi $\{x_0\}$ bodisi $\{x_0, y_0\}$, kjer je y_0 enolično določeno vozlišče grafa Δ, ki je na razdalji k od x_0. Torej je Γ bodisi k-kocka (v primeru, ko je $C_0 = \{x_0\}$) bodisi antipodni kvocient k-kocke (v primeru, ko je $C_0 = \{x_0, y_0\}$). Poglejmo si primer, ko je Γ antipodni kvocient k-kocke. Če je k sodo število, potem niti $k-2$ niti $2-k$ nista lastni vrednosti grafa Γ (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 264]). Torej mora biti k liho število. Ker pa je premer d grafa Γ večji ali enak 3, mora biti $k \ge 7$. Izrek je s tem dokazan. ■

Opomba: Ideja dokaza je bila najprej uporabljena v članku Meyerowitz [33], glej tudi Brouwer, Godsil, Koolen in Martin [6].

Izrek 4.2.8 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, stopnje $k \geq 3$, s presečnimi števili $a_1 = a_2 = 0$, za katerega parameter γ_2 obstaja. Potem velja vsaj ena od naslednjih trditev:*

(i) $\gamma_2 = c_2 = 1$,

(ii) $\gamma_2 = 1, c_2 = 2$ *in* $c_3 = 3$,

(iii) Γ *je dvodelen in* 2*-homogen.*

DOKAZ. Označimo $\gamma = \gamma_2$ in si oglejmo dva primera: $\gamma = 1$ in $\gamma \geq 2$. Če je $\gamma = 1$ in $c_2 = 1$, potem dobimo primer (i). Če pa je $\gamma = 1$ in $c_2 \geq 2$, potem iz leme 4.2.6(i) sledi, da je $c_2 = 2$. Sedaj pa po lemi 4.2.6(ii) dobimo še $c_3 = 3$. Tako dobimo primer (ii) in dokaz je tudi v tem primeru končan.

Privzemimo sedaj, da je $\gamma \geq 2$ in pokažimo, da je Γ dvodelen in 2-homogen. Iz leme 4.2.6(i) najprej dobimo $c_2 > 2$. Če je $\gamma \geq c_2$, potem, zopet iz leme 4.2.6(i), dobimo $c_2 \geq k$, kar pa ni mogoče. Torej je $c_2 > \gamma$. Sedaj pa najprej pokažimo, da je $2c_3 \geq k + 3$. Ker je $c_2 > \gamma \geq 2$, je $c_2\gamma - 2c_2 + 2\gamma = c_2(\gamma - 2) + 2\gamma > \gamma^2 > \gamma(\gamma - 1)$. To pa pomeni, da je

$$\frac{c_2\gamma - 2c_2 + 2\gamma}{\gamma(\gamma - 1)} > 1.$$

Iz leme 4.2.6 dobimo tudi

$$k = \frac{(c_2 - 1)(c_2 - 2)}{\gamma - 1} + 2 \quad \text{in} \quad c_3 = \frac{c_2(c_2 - 1)}{\gamma} + 1. \tag{4.5}$$

Torej je

$$2c_3 - k = (c_2 - 1)\frac{c_2\gamma - 2c_2 + 2\gamma}{\gamma(\gamma - 1)},$$

odtod pa $2c_3 - k > c_2 - 1 \geq 2$ ter zato $2c_3 \geq k + 3$.

Pokažimo sedaj, da je Γ dvodelen. Če Γ ni dvodelen, naj bo i najmanjše naravno število, za katerega je $a_i \neq 0$. Seveda je $i \geq 3$. Po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 5.5.4(ii)] dobimo $c_i \leq a_i$. Ker je zaporedje $c_1, c_2, \cdots, c_d$ po izreku 2.3.3(ii) naraščajoče, in ker je $2c_3 \geq k + 3$, je

$$a_i \geq c_i \geq c_3 > \frac{k}{2}.$$

To pa je seveda protislovje, saj je $a_i + c_i \leq k$. Graf Γ je torej dvodelen, iz (4.5) pa dobimo še

$$b_3 = k - c_3 = \frac{(c_2 - \gamma)(c_2 - \gamma - 1)}{\gamma(\gamma - 1)}. \tag{4.6}$$

Hitro se lahko tudi prepričamo, da je premer grafa Γ manjši ali enak 5. Ker je $c_3 > k/2$ in ker je $b_3 + c_3 = k$, je seveda $b_3 < c_3$. To pa pomeni, da je premer grafa Γ manjši ali enak 5, glej izrek 2.3.3(iii). Pokažimo sedaj še, da je graf Γ 2-homogen. Najprej se prepričajmo, da c_2 deli število $2\gamma(\gamma + 1)$. Ker je $k_2 = k(k - 1)/c_2$ celo število, mora

c_2 deliti $k(k-1)$. Iz enačbe (4.5) izračunajmo $k(\gamma-1)$ in $(k-1)(\gamma-1)$, od tod pa še $(\gamma-1)^2k(k-1) = (c_2^2-3c_2+2\gamma)(c_2^2-3c_2+\gamma+1)$. Ker c_2 deli $k(k-1)$, mora seveda deliti tudi $(\gamma-1)^2k(k-1)$. Torej mora c_2 deliti število $2\gamma(\gamma+1)$.

Oglejmo si sedaj primere $d=3$, $d=4$ in $d=5$ vsakega posebej. Če je $d=3$, potem mora biti $b_3=0$. Ker pa je $c_2>\gamma$, iz (4.6) dobimo $c_2=\gamma+1$. Toda potem iz (4.5) sledi $k=\gamma+2$. Graf Γ je zato poln dvodelen graf brez 1-faktorja, ki pa je seveda 2-homogen, glej razdelek 4.1.

Privzemimo sedaj, da je $d=4$. Iz Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Lemma 4.1.7] dobimo, da je presečno število p^4_{42} enako $k(k-1-c_3)/c_2$. Torej mora c_2 deliti $k(k-1-c_3)$. Iz (4.5) dobimo $\gamma(\gamma-1)^2k(k-1-c_3) = (c_2-1)(c_2-2\gamma)(c_2^2-3c_2+2\gamma)$. Zato število c_2 deli število $4\gamma^2$. Toda ker c_2 deli $2\gamma(\gamma+1)$, mora deliti tudi število $4\gamma(\gamma+1)-4\gamma^2=4\gamma$. Ker pa je $c_2>\gamma$, dobimo $c_2\in\{4\gamma/3, 2\gamma, 4\gamma\}$. Oglejmo si vsako od teh treh možnosti posebej. Stopnja k je seveda naravno število, zato v primeru $c_2=4\gamma$ iz (4.5) dobimo $(\gamma-1)\mid 6$, oziroma $\gamma\in\{2,3,4,7\}$. Samo za $\gamma=3$ je število k_2 tudi naravno, vendar pa za $\gamma=3$ število p^4_{42} ni naravno. Če je $c_2=2\gamma$, potem iz (4.5) dobimo $k=4\gamma$ in $c_3=4\gamma-1$. Graf Γ je torej razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{4\gamma, 4\gamma-1, 2\gamma, 1; 1, 2\gamma, 4\gamma-1, 4\gamma\}$, oziroma Hadamardov graf, ki pa je 2-homogen (glej razdelek 4.1). V primeru, ko pa je $c_2=4\gamma/3$, iz (4.5) dobimo, da je stopnja k celo število samo za $\gamma=3$. Vendar pa je potem $c_2=4$, $k=5$ in $c_3=5$, kar pa je v protislovju s predpostavko, da je premer d enak 4. S tem smo zaključili dokaz primera $d=4$.

Oglejmo si še primer $d=5$. V tem primeru je $b_3\geq c_2$ po izreku 2.3.3(iii). Iz (4.6) zato dobimo $(c_2-\gamma)(c_2-\gamma-1)\geq c_2\gamma(\gamma-1)$, oziroma $c_2\geq\gamma(\gamma+1)$. Ker pa c_2 deli $2\gamma(\gamma+1)$, je seveda $c_2\in\{\gamma(\gamma+1), 2\gamma(\gamma+1)\}$. Vzemimo najprej, da je $c_2=2\gamma(\gamma+1)$. Ker mora biti stopnja k naravno število, iz (4.5) zopet dobimo, da mora $\gamma-1$ deliti število 6, torej $\gamma\in\{2,3,4,7\}$. Vendar za nobeno od teh vrednosti število k_3 ni naravno število, zato lahko privzamemo, da je $c_2=\gamma(\gamma+1)$. V tem primeru imamo $c_2=b_3$ in $c_3=b_2$, ter zato $k_4=k(k-1)/c_4$. Torej mora c_4 deliti število $k(k-1)$. Če je $c_4=k-1$, potem je Γ razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{k, k-1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k\}$, kjer je $k=\gamma(\gamma^2+3\gamma+1)$ in $c=c_2=\gamma(\gamma+1)$. Takšni grafi pa so seveda 2-homogeni, glej razdelek 4.1. Privzemimo sedaj še $c_4<k-1$. Potem je $c_4=k(k-1)/(k+a)$ za neko naravno število a. Iz $c_4\geq c_3$ dobimo $a\leq\gamma^2+2\gamma-1-1/(\gamma(\gamma+2))$. Ker pa je a naravno število, je $a\leq\gamma^2+2\gamma-2$. Graf Γ seveda ni antipoden, saj je $b_4=k-c_4>c_1=1$. Ker je $a_5=0$, dobimo po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 5.6.1], da je $k_2\leq k_5(k_5-1)$. Ker pa je $k_2=(\gamma^2+3\gamma+1)(\gamma^2+2\gamma-1)$ in $k_5=a+1$, to pomeni

$$(\gamma^2+3\gamma+1)(\gamma^2+2\gamma-1)\leq(a+1)a\leq(\gamma^2+2\gamma-1)(\gamma^2+2\gamma-2).$$

Od tod sledi $\gamma\leq-3$, kar pa je seveda protislovje. Izrek je tako dokazan. ■

Sedaj pa lahko dokažemo izrek 4.2.1.

Dokaz izreka 4.2.1. Ker so razdaljno-regularni grafi s stopnjo $k=2$ natanko cikli, lahko predpostavimo $k\geq 3$. Če je premer $d=2$, potem je Γ dvodelen krepko-regularen graf, torej poln dvodelen graf. Poln dvodelen graf ima tri lastne vrednosti: $\pm k$ z večkratnostjo 1 in 0 z večkratnostjo $2(k-1)$. Lastna vrednost 0 ima torej večkratnost k natanko takrat, ko je $k=2$. V tem primeru pa je Γ 4-cikel oziroma 2-kocka. Zato predpostavimo še $d \geq 3$.

Naj ima Γ lastno vrednost z večkratnostjo k. Po lemi 4.2.5 je $c_2 \geq 2$, parameter γ_2 pa obstaja in je enak

$$\gamma_2 = \frac{(k-\theta^2)(2c_2-k)+c_2^2(\theta^2-1)}{\theta^2(k-1)}.$$

Po izreku 4.2.8 je zato graf Γ bodisi dvodelen in 2-homogen bodisi je $\gamma_2=1$, $c_2=2$ in $c_3=3$. Če je Γ dvodelen in 2-homogen, potem je po izreku 4.1.1 graf Γ eden od grafov (ii)-(v) izreka 4.2.1. Če pa je $\gamma_2=1$, $c_2=2$ in $c_3=3$, potem najprej iz zgornje formule za γ_2 dobimo, da je $\theta \in \{k-2, 2-k\}$. Po izreku 4.2.7 je zato graf Γ bodisi k-kocka bodisi je k liho število večje ali enako 7 in je Γ antipodni kvocient k-kocke.

Privzemimo sedaj, da je graf Γ eden od grafov (i)-(vi) izreka 4.2.1 in pokažimo, da ima Γ v tem primeru lastno vrednost z večkratnostjo k. Če je Γ eden od grafov (ii)-(v) izreka 4.2.1, potem je Γ dvodelen, ter ima lastno vrednost z večkratnostjo k, glej izrek 4.1.2. Dalje, n-cikel ima lastno vrednost $2\cos(2\pi/n)$ z večkratnostjo 2, glej Biggs [2, stran 17]. In končno, antipodni kvocient k-kocke, kjer je k liho število, $k \geq 7$, ima lastno vrednost $2-k$ z večkratnostjo k. Izrek je tako dokazan. ∎

4.2.3 Skoraj 2-homogeni dvodelni razdaljno-regularni grafi

Dvodelen razdaljno-regularen graf Γ premera $d \geq 3$ je *skoraj 2-homogen*, če za Γ obstaja parameter γ_i za vsak $i \in \{1, \ldots, d-2\}$. Skoraj 2-homogene dvodelne razdaljno-regularne grafe je v [12] vpeljal in študiral Curtin. Ker za vsak razdaljno-regularen graf parameter $\gamma_1 = 1$ obstaja, je vsak dvodelen razdaljno-regularen graf premera 3 tudi skoraj 2-homogen. Skoraj 2-homogena lastnost dvodelnih razdaljno-regularnih grafov nam torej da dodatne kombinatorične lastnosti šele v primeru, ko je premer grafa večji ali enak 4. Zato bomo v tem podrazdelku privzeli, da je premer $d \geq 4$. Izrek 4.2.8 nam omogoča podati klasifikacijo skoraj 2-homogenih razdaljno-regularnih grafov premera $d \geq 4$. Dokažimo naslednji izrek.

Izrek 4.2.9 *Dvodelen razdaljno-regularen graf s premerom $d \geq 4$ in stopnjo k je skoraj 2-homogen natanko takrat, ko je izomorfen enemu od naslednjih grafov:*

(i) *cikel dolžine $2d$,*

(ii) *d-kocka,*

(iii) *Hadamardov graf s presečno tabelo $\{4\gamma, 4\gamma-1, 2\gamma, 1; 1, 2\gamma, 4\gamma-1, 4\gamma\}$, $\gamma \in \mathbb{N}$,*

(iv) *razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{k, k-1, k-c, c, 1; 1, c, k-c, k-1, k\}$, $k = \gamma(\gamma^2+3\gamma+1)$, $c = \gamma(\gamma+1)$, $\gamma \in \mathbb{N}$,*

(v) *antipodni kvocient $2d$-kocke,*

(vi) *posplošeni 8-cikel reda $(1, k-1)$, to je razdaljno-regularen s presečno tabelo $\{k, k-1, k-1, k-1; 1, 1, 1, k\}$,*

(vii) *posplošeni 12-cikel reda $(1, k-1)$, to je razdaljno-regularen s presečno tabelo $\{k, k-1, k-1, k-1, k-1, k-1; 1, 1, 1, 1, 1, k\}$.*

DOKAZ. Ker so razdaljno-regularni grafi s $k = 2$ natanko cikli, lahko brez škode za splošnost privzamemo $k \geq 3$. Naj bo Γ skoraj 2-homogen dvodelen razdaljno-regularen graf premera $d \geq 4$. Parameter γ_2 torej obstaja, zato je po izreku 4.2.8 Γ bodisi 2-homogen bodisi je $\gamma_2 = 1$. Če je Γ 2-homogen, potem je, po izreku 4.1.1, dokaz končan.

Če je $\gamma_2 = 1$ in $c_2 = 1$, potem je po Curtinovem izreku [12, Theorem 4.4] Γ izomorfen posplošenemu $2d$-kotniku reda $(1, k-1)$. Ker pa je $d \geq 4$, po Feit-Higmanovem izreku [16] (glej tudi Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 6.5.1]) dobimo $d \in \{4, 6\}$. V tem primeru je graf Γ torej posplošeni 8-cikel ali posplošeni 12-cikel.

Če pa je $\gamma_2 = 1$ in $c_2 \geq 2$, po Curtinovem izreku [12, Theorem 4.7] dobimo, da je Γ bodisi d-kocka ali antipodni kvocient $2d$-kocke.

Pokažimo sedaj še, da so grafi (i)-(vii) iz izreka 4.2.9 res skoraj 2-homogeni. Grafi (i)-(iv) so 2-homogeni (glej razdelek 4.1), torej so tudi skoraj 2-homogeni. Antipodni kvocient $2d$-kocke in posplošen $2d$-cikel reda $(1, k-1)$ pa sta skoraj 2-homogena po Curtin [12, Theorem 4.4, Theorem 4.7]. Izrek je tako dokazan. ■

4.3 Grafi brez trikotnikov

Ker smo razdaljno-regularne grafe brez trikotnikov in petkotnikov, ki imajo lastno vrednost enako stopnji grafa, klasificirali že v razdelku 4.2, se bomo v tem razdelku posvetili razdaljno-regularnim grafom, ki so brez trikotnikov, vendar pa imajo petkotnike in lastno vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa. Klasifikacija teh grafov je zaenkrat še pretežak problem, vendar pa lahko pokažemo, da imajo tudi ti grafi dodatne kombinatorične lastnosti. V nekaterih primerih lahko celo pokažemo, da so 1-homogeni. Pravzaprav so vsi znani primeri takih grafov 1-homogeni.

V nadaljevanju bomo najprej dokazali, da tudi v tem primeru lastna vrednost z večkratnostjo enako stopnji grafa ne more biti enaka 0. Nato bomo pokazali, katere dodatne kombinatorične lastnosti imajo taki grafi. Povedali bomo, v katerih primerih lahko iz teh dodatnih kombinatoričnih lastnosti sklepamo na 1-homogenost grafa. Potem se bomo posvetili neskončni družini dopustnih presečnih tabel antipodnih razdaljno-regularnih grafov premera 5 (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 417]). Pokazali bomo, da drugi in četrti predstavnik te družine ne obstajata. Da ne obstaja drugi predstavnik te družine je sicer že bilo dokazano (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 11.4.5]), vendar je bila v dokazu bistveno uporabljena struktura pripadajočega antipodnega kvocienta tega grafa, to je Gewirtzovega grafa.

4.3.1 O lastni vrednosti

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje k, premera $d \geq 2$ ter s presečnima številoma $a_1 = 0$ in $a_2 \neq 0$. Privzemimo, da ima graf Γ lastno vrednost θ z večkratnostjo k. V tem podrazdelku bomo pokazali, da mora biti $\theta \neq 0$. Oglejmo si najprej primera $k = 2$ in $d = 2$. Če je graf Γ cikel, potem mora biti zaradi $a_2 \neq 0$ izomorfen petciklu. Vendar pa število 0 ni lastna vrednosti petcikla. Če pa je $d = 2$, potem je Γ krepko-regularen graf. Če je $\theta = 0$, potem je Γ izomorfen polnemu večdelnemu grafu (glej naprimer Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 1.3.1(v)]). Torej ima Γ bodisi $a_1 \neq 0$ bodisi $a_2 = 0$. V nadaljevanju tega podrazdelka zato privzemimo, da je $d \geq 3$ in $k \geq 3$.

Lema 4.3.1 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ ter s presečnima številoma $a_1 = 0$ in $a_2 \neq 0$. Privzemimo, da ima graf Γ lastno vrednost $\theta = 0$ z večkratnostjo k. Naj bo E pripadajoči glavni idempotent in $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Izberimo si $x \in V\Gamma$ in $y \in \Gamma_i(x)$ $(2 \leq i \leq d)$. Potem je*

$$Ey = A_i\Big(\sum_{z \in \Gamma(x) \cap \Gamma_i(y)} Ez\Big) + B_i\Big(\sum_{z \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)} Ez\Big) + \theta_i^* Ex,$$

kjer je

$$A_i = \frac{\theta_i^* - \theta_{i-1}^*}{1 - \theta_2^*}$$

ter

$$B_i = \frac{\theta_{i+1}^* - \theta_{i-1}^*}{1 - \theta_2^*} \quad (1 \leq i \leq d-1) \quad in \quad B_d = 0.$$

DOKAZ. Pokažimo najprej, da so imenovalci v zgornjih enačbah za A_i in B_i neničelni. Ker je $\theta = 0$, iz leme 2.3.5(ii) dobimo $\theta_1^* = 0$ in $\theta_2^* = 1/(1-k)$. Torej je $1 - \theta_2^* \neq 0$.

Naj bo z_1 sosed vozlišča x, za katerega velja $\partial(z_1, y) = i - 1$. Ker je večkratnost lastne vrednosti $\theta = 0$ enaka k, so po lemi 4.2.4(iii) vektorji Ex in $\{Ez \mid z \in \Gamma(x) \setminus \{z_1\}\}$ baza lastnega podprostora lastne vrednosti θ. Torej obstajajo taka realna števila α_z $(z \in \Gamma(x) \setminus \{z_1\})$ in δ, tako da je

$$Ey = \sum_{z \in \Gamma(x) \setminus \{z_1\}} \alpha_z Ez + \delta Ex. \tag{4.7}$$

Če zgornjo enačbo skalarno pomnožimo z $(|V\Gamma|/k)Ex$ in uporabimo lemo 2.3.5(i), dobimo

$$\frac{|V\Gamma|}{k}\langle Ey, Ex\rangle = \theta_i^* = \delta \frac{|V\Gamma|}{k}\langle Ex, Ex\rangle = \delta,$$

saj je $\theta_1 = 0$. Če pa enačbo (4.7) skalarno pomnožimo z $(|V\Gamma|/k)Ev$ $(v \in \Gamma(x) \setminus \{z_1\})$ in uporabimo lemo 2.3.5(i), dobimo

$$\alpha_v(\theta_0^* - \theta_2^*) + \sum_{z \in \Gamma(x) \setminus \{z_1\}} \alpha_z \theta_2^* = \begin{cases} \theta_{i-1}^* & \text{če} \quad v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(y), \\ \theta_i^* & \text{če} \quad v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_i(y), \\ \theta_{i+1}^* & \text{če} \quad v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i+1}(y). \end{cases} \tag{4.8}$$

Torej obstajajo taka realna števila C_i, A_i in B_i, da je

- $\alpha_v = C_i$ za $v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)$,
- $\alpha_v = A_i$ za $v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_i(y)$,
- $\alpha_v = B_i$ za $v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)$.

Ker pa je graf Γ razdaljno-regularen, je

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)| = c_i, \quad |\Gamma(x) \cap \Gamma_i(y)| = a_i, \quad |\Gamma(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)| = b_i.$$

Enačbe (4.8) nam zato dajo naslednji sistem treh enačb za tri neznanke C_i, A_i in B_i:

$$\begin{aligned}
C_i(\theta_0^* - \theta_2^*) + \theta_2^*((c_i - 1)C_i + a_iA_i + b_iB_i) &= \theta_{i-1}^*, \\
A_i(\theta_0^* - \theta_2^*) + \theta_2^*((c_i - 1)C_i + a_iA_i + b_iB_i) &= \theta_i^*, \\
B_i(\theta_0^* - \theta_2^*) + \theta_2^*((c_i - 1)C_i + a_iA_i + b_iB_i) &= \theta_{i+1}^*.
\end{aligned}$$

Če enačbo (4.7) skalarno pomnožimo še z Ez_1, pa dobimo

$$\theta_2^*((c_i - 1)C_i + a_iA_i + b_iB_i) = \theta_{i-1}^*. \tag{4.9}$$

Sedaj pa se ni težko prepričati, da je $C_i = 0$, $A_i = (\theta_i^* - \theta_{i-1}^*)/(1 - \theta_2^*)$ in $B_i = (\theta_{i+1}^* - \theta_{i-1}^*)/(1 - \theta_2^*)$. ■

Lema 4.3.2 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ ter s presečnima številoma $a_1 = 0$ in $a_2 \neq 0$. Privzemimo, da ima graf Γ lastno vrednost $\theta = 0$ z večkratnostjo k. Naj bo $x \in V\Gamma$ in naj bosta $y_1, y_2 \in \Gamma_2(x)$ sosednji vozlišči. Potem je*

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma_2(y_1) \cap \Gamma_2(y_2)| = k - 2b_2 - 2c_2 + \frac{b_2^2 k(k-2)}{(k-1)(k-c_2)^2}.$$

DOKAZ. Naj bo $S_j^i = S_j^i(x, y_1, y_2) = \Gamma(x) \cap \Gamma_i(y_1) \cap \Gamma_j(y_2)$ $(1 \leq i, j \leq 3)$. Označimo $\alpha = |S_2^2|$. Potem je $S_1^1 = S_1^3 = S_3^1 = \emptyset$, $|S_1^2| = |S_2^1| = c_2$, $|S_3^2| = |S_2^3| = a_2 - c_2 - \alpha$ in $|S_3^3| = b_2 - a_2 + c_2 + \alpha$. Po lemi 4.3.1 je

$$Ey_1 = A_2\Big(\sum_{z \in S_1^2 \cup S_2^2 \cup S_3^2} Ez\Big) + B_2\Big(\sum_{z \in S_2^3 \cup S_3^3} Ez\Big) + \theta_2^* Ex$$

in

$$Ey_2 = A_2\Big(\sum_{z \in S_2^1 \cup S_2^2 \cup S_2^3} Ez\Big) + B_2\Big(\sum_{z \in S_3^2 \cup S_3^3} Ez\Big) + \theta_2^* Ex,$$

kjer sta A_2 in B_2 konstanti podani v lemi 4.3.1. Torej je

$$0 = \frac{|V\Gamma|}{k}\langle Ey_1, Ey_2\rangle = (\theta_2^*)^2 + U\theta_2^* + V,$$

kjer je

$$V = \alpha A_2^2 + 2(a_2 - c_2 - \alpha)A_2B_2 + (b_2 - a_2 + c_2 + \alpha)B_2^2$$
$$U + V = (a_2A_2 + b_2B_2)^2.$$

Ker pa je po (4.9) $a_2A_2 + b_2B_2 = 0$, je $U = -V$. Enačba $0 = (\theta_2^*)^2 + V(1 - \theta_2^*)$ je torej linearna enačba za α, iz nje pa dobimo željeno vrednost za α. ■

Lema 4.3.3 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ ter s presečnima številoma $a_1 = 0$ in $a_2 \neq 0$. Privzemimo, da graf ima Γ lastno vrednost $\theta = 0$ z večkratnostjo k. Naj bo $x \in V\Gamma$ in naj bosta $y_1 \in \Gamma_2(x)$ ter $y_2 \in \Gamma_3(x)$ sosednji vozlišči. Potem je*

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma_2(y_1) \cap \Gamma_2(y_2)| = k - c_2 + \frac{b_2^2 k(k-2)}{(k-1)(k-c_2)^2} + \frac{b_2(c_2(k-1) - 2k^2 + 3k)}{(k-1)(k-c_2)}.$$

Dokaz. Naj bo $S_j^i = S_j^i(x, y_1, y_2) = \Gamma(x) \cap \Gamma_i(y_1) \cap \Gamma_j(y_2)$ $(1 \leq i \leq 3)$, $(2 \leq j \leq 4)$. Označimo $\beta = |S_2^2|$. Potem je $S_3^1 = S_4^1 = S_4^2 = \emptyset$, $|S_2^1| = c_2$, $|S_3^2| = a_2 - \beta$, $|S_2^3| = c_3 - c_2 - \beta$, $|S_3^3| = a_3 - a_2 + \beta$ in $S_4^3 = b_3$. Podobno kot v dokazu leme 4.3.2 dobimo enačbo

$$0 = \theta_2^*\theta_3^* + U\theta_2^* + V,$$

kjer je

$$V = (a_2 - \beta)A_2A_3 + (a_3 - a_2 + \beta)B_2A_3 + b_3B_2B_3$$
$$U + V = (a_2A_2 + b_2B_2)(a_3A_3 + b_3B_3).$$

Ker je po (4.9) $a_2A_2 + b_2B_2 = 0$, je $U = -V$. Enačba $0 = \theta_2^*\theta_3^* + V(1 - \theta_2^*)$ pa je linearna enačba za β, iz katere dobimo željeno vrednost za β. ■

Izrek 4.3.4 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ ter s presečnima številoma $a_1 = 0$ in $a_2 \neq 0$. Privzemimo, da ima graf Γ lastno vrednost θ z večkratnostjo k. Potem je $\theta \neq 0$.*

Dokaz. Recimo, da je $\theta = 0$. Iz leme 4.3.2 in leme 4.3.3 dobimo, da morata biti števili

$$\alpha = k - 2b_2 - 2c_2 + \frac{b_2^2 k(k-2)}{(k-1)(k-c_2)^2}$$

in

$$\beta = k - c_2 + \frac{b_2^2 k(k-2)}{(k-1)(k-c_2)^2} + \frac{b_2(c_2(k-1) - 2k^2 + 3k)}{(k-1)(k-c_2)}$$

celi števili. Toraj mora biti tudi $b_2(c_2(k-1) - 2k^2 + 3k)/((k-1)(k-c_2))$ celo število. Seveda pa mora biti v tem primeru celo število tudi število

$$\frac{b_2(c_2(k-1) - 2k^2 + 3k)}{k-1} = b_2c_2 - b_2\frac{2k^2 - 3k}{k-1} = b_2c_2 - b_2(2k-1) + \frac{b_2}{k-1}.$$

Ker je $b_2 \leq k - 1$, je torej ali $b_2 = 0$ ali pa $b_2 = k - 1$. Če je $b_2 = 0$, potem je $d = 2$, kar pa po predpostavkah izreka ne gre. Če pa je $b_2 = k - 1$, potem je $a_2 = 0$, kar je spet v protislovju s predpostavkami izreka. Lastna vrednost θ je torej različna od 0. ■

4.3.2 1-homogena lastnost

V tem podrazdelku bomo dokazali, da imajo razdaljno-regularni grafi z $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ in z lastno vrednostjo z večkratnostjo enako stopnji grafa, nekatere dodatne kombinatorične lastnosti. Za nekatere bomo celo uspeli pokazati, da so 1-homogeni. Dokažimo najprej lemo, ki bo osnova našega nadaljnega raziskovanja v tem razdelku.

Lema 4.3.5 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje k, premera $d \geq 2$ ter s presečnima številoma $a_1 = 0$ in $a_2 \neq 0$. Naj bo θ lastna vrednost grafa Γ z večkratnostjo k, E pripadajoči glavni idempotent, $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ pa pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Naj bo $x \in V\Gamma$ in $y \in \Gamma_i(x)$ $(1 \leq i \leq d)$. Potem je*

$$Ey = C_i\Big(\sum_{z \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)} Ez\Big) + A_i\Big(\sum_{z \in \Gamma(x) \cap \Gamma_i(y)} Ez\Big) + B_i\Big(\sum_{z \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)} Ez\Big),$$

kjer je

$$C_i = \frac{\theta_1^*\theta_{i-1}^* - \theta_2^*\theta_i^*}{\theta_1^*(\theta_0^* - \theta_2^*)} \tag{4.10}$$

$$A_i = \frac{\theta_1^*\theta_i^* - \theta_2^*\theta_i^*}{\theta_1^*(\theta_0^* - \theta_2^*)} \tag{4.11}$$

$$B_i = \frac{\theta_1^*\theta_{i+1}^* - \theta_2^*\theta_i^*}{\theta_1^*(\theta_0^* - \theta_2^*)} \quad (1 \leq i \leq d-1) \quad \textit{in} \quad B_d = 0. \tag{4.12}$$

Imenovalci v enačbah (4.10)–(4.12) *so neničelni.*

DOKAZ. Pokažimo najprej, da so imenovalci v enačbah (4.10)–(4.12) neničelni. Ker je $a_1 = 0$, je po lemi 2.3.5(ii) $\theta_2^* = (\theta^2 - k)/(k(k-1))$. Ker je večkratnost m_θ lastne vrednosti θ enaka k, je $\theta \neq \pm k$. Zato je $\theta_2^* \neq \theta_0^* = 1$. Ker pa je po izreku 4.3.4 lastna vrednost $\theta \neq 0$, je tudi $\theta_1^* = \theta/k \neq 0$. Imenovalci v enačbah (4.10)–(4.12) so torej neničelni.

Ker je $m_\theta = k$ in ker je po izreku 4.3.4 $\theta \neq 0$, so po lemi 4.2.4(ii) vektorji Ez $(z \in \Gamma(x))$ baza lastnega podprostora lastne vrednosti θ. Ker pa je Ey lastni vektor za θ, obstajajo realna števila α_z $(z \in \Gamma(x))$, tako da je

$$Ey = \sum_{z \in \Gamma(x)} \alpha_z Ez. \tag{4.13}$$

Če zgornjo enačbo skalarno pomnožimo z $(|V\Gamma|/k)Ev$ $(v \in \Gamma(x))$ in uporabimo lemo 2.3.5(i), dobimo

$$\alpha_v(\theta_0^* - \theta_2^*) + \sum_{z \in \Gamma(x)} \alpha_z \theta_2^* = \begin{cases} \theta_{i-1}^* & \text{če } \; v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(y), \\ \theta_i^* & \text{če } \; v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_i(y), \\ \theta_{i+1}^* & \text{če } \; v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i+1}(y). \end{cases} \tag{4.14}$$

Torej obstajajo taka realna števila C_i, A_i in B_i, da je

- $\alpha_v = C_i$ za $v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)$,
- $\alpha_v = A_i$ za $v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_i(y)$,
- $\alpha_v = B_i$ za $v \in \Gamma(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)$.

Ker pa je graf Γ razdaljno-regularen, je

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma_{i-1}(y)| = c_i, \quad |\Gamma(x) \cap \Gamma_i(y)| = a_i, \quad |\Gamma(x) \cap \Gamma_{i+1}(y)| = b_i.$$

Enačbe (4.14) nam zato dajo naslednji sistem treh enačb za tri neznanke C_i, A_i in B_i:

$$\begin{aligned} C_i(\theta_0^* - \theta_2^*) + \theta_2^*(c_iC_i + a_iA_i + b_iB_i) &= \theta_{i-1}^* \\ A_i(\theta_0^* - \theta_2^*) + \theta_2^*(c_iC_i + a_iA_i + b_iB_i) &= \theta_i^* \\ B_i(\theta_0^* - \theta_2^*) + \theta_2^*(c_iC_i + a_iA_i + b_iB_i) &= \theta_{i+1}^*. \end{aligned}$$

Pomnožimo sedaj enačbo (4.13) skalarno še z $(|V\Gamma|/k)Ex$. Dobimo

$$\frac{|V\Gamma|}{k}\langle Ey, Ex\rangle = \theta_i^* = \theta_1^*(c_iC_i + a_iA_i + b_iB_i).$$

Od tod ter iz enačb (4.15), (4.15) in (4.15) pa dobimo ravno iskane vrednosti za C_i, A_i in B_i. ∎

Oglejmo si sedaj najprej primer, ko ima graf Γ premer $d = 2$. Naj bo torej Γ povezan krepko regularen graf stopnje k, brez trikotnikov in z lastno vrednostjo, ki ima večkratnost enako k. Z μ označimo število skupnih sosedov dveh vozlišč, ki sta na razdalji 2. Naj bosta θ_1 in θ_2 od k različni lastni vrednosti grafa Γ z večkratnostima m_1 in m_2, $\theta_1 > \theta_2$. Ker je Γ brez trikotnikov, je

$$k = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2), \quad \mu = -(\theta_1 + \theta_2),$$

$$m_1 = k(k - \theta_2)(\theta_2 + 1)/(\mu(\theta_2 - \theta_1)), \quad m_2 = k(k - \theta_1)(\theta_1 + 1)/(\mu(\theta_1 - \theta_2)),$$

glej naprimer Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 1.3.1(iii)]. Če θ_1 in θ_2 nista celi števili, je Γ konferenčni krepko regularen graf. Toda za konferenčni krepko regularen graf velja $k = 2\mu$ in $\lambda = \mu - 1$. Ker pa je Γ brez trikotnikov, je $\lambda = 0$, oziroma $\mu = 1$ in $k = 2$. Torej je Γ izomorfen petciklu. Če pa Γ ni konferenčni graf, potem je $0 \le \theta_1 \in \mathbb{Z}$ in $-2 \ge \theta_2 \in \mathbb{Z}$ (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 1.3.1(ii) in (iv)]). Če je $m_1 = k$, dobimo $(k - \theta_2)(\theta_2 + 1) = \mu(\theta_2 - \theta_1)$ in od tod $\theta_1 = -1$ ali $\theta_1 = -\theta_2(2 + \theta_2)$. Ker je $\theta_1 \ge 0$, odpade možnost $\theta_1 = -1$. Iz $0 \le \theta_1 = -\theta_2(2 + \theta_2)$ pa dobimo $\theta_2 = -2$ ter $\theta_1 = 0$. Torej $k = \mu = 2$, graf Γ pa je v tem primeru štiricikel.

Poglejmo si sedaj možnost $m_2 = k$, torej $(k - \theta_1)(\theta_1 + 1) = \mu(\theta_1 - \theta_2)$. Dobimo $\theta_2 = -1$ (kar ne gre), ali $\theta_2 = -\theta_1(2 + \theta_1)$. Če je $\theta_1 = 0$, je tudi $\theta_2 = 0$, kar ni možno. Zato označimo $t = \theta_1 \in \mathbb{N}$. Dobimo enoparametrično družino krepko regularnih grafov s parametri:

$$k = t(t^2 + 3t + 1), \quad \mu = t(t + 1).$$

Za $t = 1$ dobimo antipodni kvocient 5-kocke, za $t = 2$ pa Higman-Simsov graf (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 13.1]). Za $t > 2$ je obstoj teh grafov zaenkrat še odprt problem. V nadaljevanju razdelka bomo privzeli $d \geq 3$.

Naj bosta x in y sosednji vozlišči razdaljno-regularnega grafa Γ stopnje k in premera $d \geq 3$. Spomnimo se (izrek 3.2.5), da so pri particiji vozlišč grafa Γ glede na razdaljo od x in y nekateri parametri particije lahko odvisni od izbire para x, y. Naslednji izrek nam pove, da v primeru, ko ima graf Γ lastno vrednost z večkratnostjo k, nekateri od teh parametrov niso odvisni od izbire para x, y.

Izrek 4.3.6 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje k, premera $d \geq 3$ ter s presečnima številoma $a_1 = 0$ in $a_2 \neq 0$. Naj bo θ lastna vrednost grafa Γ z večkratnostjo k in naj bo $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti, za katerega velja, da $\theta_i^* \notin \{\theta_{i-1}^*, \theta_{i+1}^*\}$, če je $d \geq 4$ in $a_i \neq 0$ $(2 \leq i \leq d-2)$. Naj bosta x in y sosednji vozlišči grafa Γ in označimo $D_i^j = D_i^j(x,y)$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Naj bosta ℓ_1 in ℓ_2 taki naravni števili, da velja $a_{\ell_1} \neq 0$, $a_{\ell_2} \neq 0$ in $a_{\ell_1 - 1} = a_{\ell_2 + 1} = 0$. Izberimo si vozlišča $z \in D_{\ell_1}^{\ell_1}$, $w \in D_{\ell_2}^{\ell_2}$, $u \in D_{\ell_3}^{\ell_3 - 1} \cup D_{\ell_3 - 1}^{\ell_3}$ $(2 \leq \ell_3 \leq d)$ in v primeru, ko je $a_d \neq 0$, še $t \in D_d^d$. Potem so števila $|\Gamma(z) \cap D_{\ell_1}^{\ell_1}|$, $|\Gamma(w) \cap D_{\ell_2}^{\ell_2}|$, $|\Gamma(u) \cap D_{\ell_3 - 1}^{\ell_3 - 1}|$ in v primeru, ko je $a_d \neq 0$, tudi $|\Gamma(t) \cap D_{d-1}^{d-1}|$, neodvisna od izbire vozlišč x, y, z, w, u, t.*

DOKAZ. Naj bo E glavni idempotent, ki pripada lastni vrednosti θ. Pokažimo najprej, da je število $|\Gamma(z) \cap D_{\ell_1}^{\ell_1}|$ neodvisno od izbire vozlišč x, y, z. Označimo $S_i^j = S_i^j(x,y,z) = \Gamma(z) \cap D_i^j$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Ker je $D_{\ell_1 - 1}^{\ell_1 - 1} = \emptyset$, je $S_{\ell_1 - 1}^{\ell_1 - 1} = \emptyset$ in $|S_{\ell_1 - 1}^{\ell_1}| = |S_{\ell_1}^{\ell_1 - 1}| = c_{\ell_1}$. Označimo $m = |S_{\ell_1}^{\ell_1}|$. Potem je $|S_{\ell_1}^{\ell_1 + 1}| = |S_{\ell_1 + 1}^{\ell_1}| = a_{\ell_1} - m - c_{\ell_1}$ in $|S_{\ell_1 + 1}^{\ell_1 + 1}| = b_{\ell_1} + c_{\ell_1} - a_{\ell_1} + m$. Vse ostale množice S_i^j so prazne (glej tudi izrek 3.2.5). Po lemi 4.3.5 imamo

$$Ex = C_{\ell_1}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_1}^{\ell_1 - 1}} Ev\Big) + A_{\ell_1}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_1 - 1}^{\ell_1} \cup S_{\ell_1}^{\ell_1} \cup S_{\ell_1 + 1}^{\ell_1}} Ev\Big) + B_{\ell_1}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_1}^{\ell_1 + 1} \cup S_{\ell_1 + 1}^{\ell_1 + 1}} Ev\Big),$$

$$Ey = C_{\ell_1}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_1 - 1}^{\ell_1}} Ev\Big) + A_{\ell_1}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_1}^{\ell_1 - 1} \cup S_{\ell_1}^{\ell_1} \cup S_{\ell_1}^{\ell_1 + 1}} Ev\Big) + B_{\ell_1}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_1 + 1}^{\ell_1} \cup S_{\ell_1 + 1}^{\ell_1 + 1}} Ev\Big),$$

kjer so C_{ℓ_1}, A_{ℓ_1} in B_{ℓ_1} konstante definirane v lemi 4.3.5. Ker sta x in y sosednji vozlišči in ker je večkratnost lastne vrednosti θ enaka k, mora biti po lemi 2.3.5(i)

$$\langle Ex, Ey \rangle = \frac{k\theta_1^*}{|V\Gamma|}.$$

Po drugi strani pa, spet s pomočjo leme 2.3.5(i), iz zgornjih formul za Ex in Ey dobimo

$$\langle Ex, Ey \rangle = \frac{k(U\theta_2^* + V\theta_0^*)}{|V\Gamma|},$$

kjer je

$$V = 2c_{\ell_1}C_{\ell_1}A_{\ell_1} + mA_{\ell_1}^2 + 2(a_{\ell_1} - m - c_{\ell_1})A_{\ell_1}B_{\ell_1} + (k - 2a_{\ell_1} + m)B_{\ell_1}^2, \qquad (4.15)$$

$$U + V = (c_{\ell_1}C_{\ell_1} + a_{\ell_1}A_{\ell_1} + b_{\ell_1}B_{\ell_1})^2. \qquad (4.16)$$

Enačba $U\theta_2^* + V\theta_0^* = \theta_1^*$ je zato linearna enačba za m, s koeficientom pri m enakim $(A_{\ell_1} - B_{\ell_1})^2(1 - \theta_2^*)$, kar pa je po (4.11) in (4.12) enako $(\theta_{\ell_1}^* - \theta_{\ell_1+1}^*)^2/(1 - \theta_2^*)$. Po predpostavkah izreka je $\theta_2^* \neq 1$ in $\theta_{\ell_1}^* \neq \theta_{\ell_1+1}^*$. Torej lahko m izračunamo iz enačbe $U\theta_2^* + V\theta_0^* = \theta_1^*$ in je zato neodvisen od izbire vozlišč x, y, z. Prvi del izreka je tako dokazan.

Dokazi drugega, tretjega in četrtega dela izreka so zelo podobni dokazu prvega dela. Dokažimo najprej drugi del. Označimo $S_i^j = S_i^j(x,y,w) = \Gamma(w) \cap D_i^j$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Ker je $D_{\ell_2+1}^{\ell_2+1} = \emptyset$, je $S_{\ell_2+1}^{\ell_2+1} = \emptyset$ in $|S_{\ell_2}^{\ell_2+1}| = |S_{\ell_2+1}^{\ell_2}| = b_{\ell_2}$. Označimo $m = |S_{\ell_2}^{\ell_2}|$. Potem je $|S_{\ell_2-1}^{\ell_2}| = |S_{\ell_2}^{\ell_2-1}| = a_{\ell_2} - m - b_{\ell_2}$ in $|S_{\ell_2-1}^{\ell_2-1}| = c_{\ell_2} + b_{\ell_2} - a_{\ell_2} + m$. Vse ostale množice S_i^j so prazne. Po lemi 4.3.5 imamo

$$Ex = C_{\ell_2}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_2}^{\ell_2-1} \cup S_{\ell_2-1}^{\ell_2-1}} Ev\Big) + A_{\ell_2}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_2-1}^{\ell_2} \cup S_{\ell_2}^{\ell_2} \cup S_{\ell_2+1}^{\ell_2}} Ev\Big) + B_{\ell_2}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_2}^{\ell_2+1}} Ev\Big),$$

$$Ey = C_{\ell_2}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_2-1}^{\ell_2} \cup S_{\ell_2-1}^{\ell_2-1}} Ev\Big) + A_{\ell_2}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_2}^{\ell_2-1} \cup S_{\ell_2}^{\ell_2} \cup S_{\ell_2}^{\ell_2+1}} Ev\Big) + B_{\ell_2}\Big(\sum_{v \in S_{\ell_2+1}^{\ell_2}} Ev\Big),$$

kjer so C_{ℓ_2}, A_{ℓ_2} in B_{ℓ_2} konstante definirane v lemi 4.3.5. Ker sta x in y sosednji vozlišči in θ lastna vrednost z večkratnostjo k, mora biti po lemi 2.3.5(i) $\langle Ex, Ey\rangle = k\theta_1^*/|V\Gamma|$. Po drugi strani pa, spet s pomočjo leme 2.3.5(i), iz zgornjih formul za Ex in Ey dobimo

$$\langle Ex, Ey\rangle = \frac{k(U\theta_2^* + V\theta_0^*)}{|V\Gamma|},$$

kjer je

$$V = 2(a_{\ell_2} - m - b_{\ell_2})C_{\ell_2}A_{\ell_2} + mA_{\ell_2}^2 + 2b_{\ell_2}A_{\ell_2}B_{\ell_2} + (k - 2a_{\ell_2} + m)C_{\ell_2}^2, \qquad (4.17)$$

$$U + V = (c_{\ell_2}C_{\ell_2} + a_{\ell_2}A_{\ell_2} + b_{\ell_2}B_{\ell_2})^2. \qquad (4.18)$$

Enačba $U\theta_2^* + V\theta_0^* = \theta_1^*$ je zato linearna enačba za m, s koeficientom pri m enakim $(A_{\ell_2} - C_{\ell_2})^2(1 - \theta_2^*)$, kar pa je po (4.11) enako $(\theta_{\ell_2}^* - \theta_{\ell_2-1}^*)^2/(1 - \theta_2^*)$. Po predpostavkah izreka je $\theta_2^* \neq 1$ in $\theta_{\ell_2}^* \neq \theta_{\ell_2-1}^*$. Torej lahko m izračunamo iz enačbe $U\theta_2^* + V\theta_0^* = \theta_1^*$ in je zato neodvisen od izbire vozlišč x, y, w. Drugi del izreka je tako dokazan.

Dokažimo sedaj tretji del izreka. Brez škode za splošnost lahko privzamemo $u \in D_{\ell_3-1}^{\ell_3}$, saj v primeru $u \in D_{\ell_3}^{\ell_3-1}$ dokaz poteka povsem analogno. Označimo $S_i^j = S_i^j(x,y,u) = \Gamma(u) \cap D_i^j$ $(0 \leq i, j \leq d)$ ter $\rho_{\ell_3} = |S_{\ell_3-1}^{\ell_3-1}|$. Potem je $|S_{\ell_3-2}^{\ell_3-1}| = c_{\ell_3-1}$, $|S_{\ell_3}^{\ell_3+1}| = b_{\ell_3}$, $|S_{\ell_3}^{\ell_3-1}| = c_{\ell_3} - \rho_{\ell_3} - c_{\ell_3-1}$, $|S_{\ell_3-1}^{\ell_3}| = a_{\ell_3-1} - \rho_{\ell_3}$ in $|S_{\ell_3}^{\ell_3}| = a_{\ell_3} - a_{\ell_3-1} + \rho_{\ell_3}$.

Vse ostale množice S_i^j so prazne. Če je $a_{\ell_3-1}=0$, potem je $\rho_{\ell_3}=|\Gamma(u)\cap D_{\ell_3-1}^{\ell_3-1}|=0$, zato lahko privzamemo $a_{\ell_3-1}\neq 0$. Po predpostavkah izreka je zato $\theta^*_{\ell_3-1}\neq\theta^*_{\ell_3}$. Po lemi 4.3.5 dobimo

$$Ex = C_{\ell_3}\Big(\sum_{v\in S_{\ell_3-2}^{\ell_3-1}\cup S_{\ell_3-1}^{\ell_3-1}\cup S_{\ell_3}^{\ell_3-1}} Ev\Big) + A_{\ell_3}\Big(\sum_{v\in S_{\ell_3-1}^{\ell_3}\cup S_{\ell_3}^{\ell_3}} Ev\Big) + B_{\ell_3}\Big(\sum_{v\in S_{\ell_3}^{\ell_3+1}} Ev\Big),$$

$$Ey = C_{\ell_3-1}\Big(\sum_{v\in S_{\ell_3-2}^{\ell_3-1}} Ev\Big) + A_{\ell_3-1}\Big(\sum_{v\in S_{\ell_3-1}^{\ell_3-1}\cup S_{\ell_3-1}^{\ell_3}} Ev\Big) + B_{\ell_3-1}\Big(\sum_{v\in S_{\ell_3}^{\ell_3-1}\cup S_{\ell_3}^{\ell_3}\cup S_{\ell_3}^{\ell_3+1}} Ev\Big),$$

kjer so $C_{\ell_3-1}, A_{\ell_3-1}, B_{\ell_3-1}, C_{\ell_3}, A_{\ell_3}$ in B_{ℓ_3} konstante definirane v lemi 4.3.5. S pomočjo leme 2.3.5(i) zopet izračunamo skalarni produkt vektorjev Ex in Ey. Dobimo $\langle Ex, Ey\rangle = k(U\theta_2^*+V\theta_0^*)/|V\Gamma|$, kjer je

$$\begin{aligned} V &= c_{\ell_3}C_{\ell_3-1}C_{\ell_3} + \rho_{\ell_3}A_{\ell_3-1}C_{\ell_3} + (c_{\ell_3}-c_{\ell_3-1}-\rho_{\ell_3})B_{\ell_3-1}C_{\ell_3} \\ &\quad +(a_{\ell_3}-a_{\ell_3-1}+\rho_{\ell_3})B_{\ell_3-1}A_{\ell_3} + (a_{\ell_3-1}-\rho_{\ell_3})A_{\ell_3-1}A_{\ell_3} + b_{\ell_3}B_{\ell_3-1}B_{\ell_3}, \\ U+V &= (c_{\ell_3}C_{\ell_3}+a_{\ell_3}A_{\ell_3}+b_{\ell_3}B_{\ell_3})(c_{\ell_3-1}C_{\ell_3-1}+a_{\ell_3-1}A_{\ell_3-1}+b_{\ell_3-1}B_{\ell_3-1}). \end{aligned}$$

Enačba $U\theta_2^*+V\theta_0^*=\theta_1^*$ je zopet linearna enačba za ρ_{ℓ_3}, koeficient pri ρ_{ℓ_3} pa je enak $(A_{\ell_3-1}-B_{\ell_3-1})(C_{\ell_3}-A_{\ell_3})(1-\theta_2^*)$. Iz (4.11) in (4.12) dobimo

$$C_{\ell_3}-A_{\ell_3} = A_{\ell_3-1}-B_{\ell_3-1} = (\theta^*_{\ell_3-1}-\theta^*_{\ell_3})/(\theta_0^*-\theta_2^*),$$

zato je $(A_{\ell_3-1}-B_{\ell_3-1})(C_{\ell_3}-A_{\ell_3})(1-\theta_2^*) = (\theta^*_{\ell_3-1}-\theta^*_{\ell_3})^2/(\theta_0^*-\theta_2^*)$. To število pa je po predpostavkah izreka različno od 0. Število ρ_{ℓ_3} zato lahko izrečunamo iz enačbe $U\theta_2^*+V\theta_0^*=\theta_1^*$, kar pa tudi pomeni, da ni odvisno od izbire vozlišč x, y, u. Tretji del izreka je tako dokazan.

Za dokaz četrtega dela izreka privzemimo $a_d\neq 0$. Označimo $S_i^j=S_i^j(x,y,t)=\Gamma(t)\cap D_i^j$ $(0\le i,j\le d)$ ter $\sigma_d=|S_{d-1}^{d-1}|$. Potem je $|S_{d-1}^d|=|S_d^{d-1}|=c_d-\sigma_d$ in $|S_d^d|=a_d-c_d+\sigma_d$. Vse ostale množice S_i^j so prazne.

Po lemi 4.3.5 dobimo

$$Ex = C_d\Big(\sum_{v\in S_d^{d-1}\cup S_{d-1}^{d-1}} Ev\Big) + A_d\Big(\sum_{v\in S_{d-1}^d\cup S_d^d} Ev\Big),$$

$$Ey = C_d\Big(\sum_{v\in S_{d-1}^d\cup S_{d-1}^{d-1}} Ev\Big) + A_d\Big(\sum_{v\in S_d^{d-1}\cup S_d^d} Ev\Big),$$

kjer sta C_d in A_d konstanti definirani v lemi 4.3.5. Zopet izračunamo skalarni produkt vektorjev Ex in Ey. Z uporabo leme 2.3.5(i) dobimo $\langle Ex, Ey\rangle = (k/|V\Gamma|)(U\theta_2^*+V\theta_0^*)$, kjer je

$$V = 2(c_d-\sigma_d)A_dC_d + \sigma_dC_d^2 + (a_d-c_d+\sigma_d)A_d^2,$$
$$U+V = (c_dC_d+a_dA_d)^2.$$

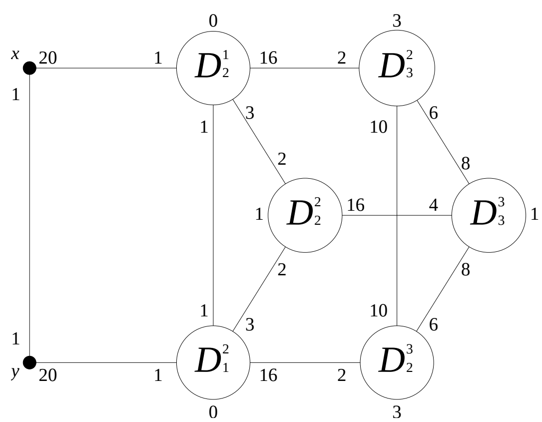
Enačba $U\theta_2^* + V\theta_0^* = \theta_1^*$ je linearna enačba za σ_d s koeficientom pri σ_d enakim $(C_d - A_d)^2(1-\theta_2^*)$. Iz (4.11) dobimo $(C_d - A_d)^2(1-\theta_2^*) = (\theta_{d-1}^* - \theta_d^*)^2/(\theta_0^* - \theta_2^*)$. Po predpostavkah izreka je $\theta_2^* \neq 1$. Ali je lahko $\theta_{d-1}^* = \theta_d^*$? Po lemi 2.3.5(ii) je potem $c_d\theta_d^* + a_d\theta_d^* = \theta\theta_d^*$, oziroma $(k-\theta)\theta_d^* = 0$. Ker je $m_\theta = k$, je $k - \theta \neq 0$. Torej je $\theta_{d-1}^* = \theta_d^* = 0$. Po lemi 2.3.5(ii) pa lahko sedaj z rekurzijo dobimo $\theta_d^* = \theta_{d-1}^* = \cdots = \theta_1^* = 0$. Toda $\theta_1^* = \theta/k \neq 0$, protislovje. Število $\theta_{d-1}^* - \theta_d^*$ je torej različno od nič in zato lahko σ_d izračunamo iz enačbe $U\theta_2^* + V\theta_0^* = \theta_1^*$. To pa pomeni, da je σ_d neodvisen od izbire vozlišč x, y, t. Izrek je s tem dokazan. ■

Pokažimo sedaj dve posledici izreka 4.3.6.

Posledica 4.3.7 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf stopnje k, premera 3 in s presečnim številom $a_1 = 0$. Če Γ ima lastno vrednost θ z večkratnostjo k, potem je 1-homogen.*

DOKAZ. Če je $a_2 = 0$, potem je Γ 1-homogen po lemi 3.3.1. Če pa je $a_2 \neq 0$, je graf Γ 1-homogen po izreku 4.3.6 in izreku 3.2.5. ■

Znan je samo en graf z $a_2 \neq 0$, ki zadošča predpostavkam posledice 4.3.7. To je enolično določen graf s presečno tabelo $\{21, 20, 16; 1, 2, 12\}$ (coset graph of doubly truncated binary Golay code, glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, section 11.3.G]). Enoličnost tega grafa sta prva dokazala Ivanov in Shpectorov v [20]. Particija vozlišč tega grafa glede na razdaljo od para sosednjih vozlišč x in y je predstavljena na sliki 4.1.



Slika 4.1: Razdaljna particija vozlišč grafa s presečno tabelo $\{21, 20, 16; 1, 2, 12\}$ glede na razdaljo od para sosednjih vozlišč x in y.

Posledica 4.3.8 *Naj bo Γ antipoden razdaljno-regularen graf premera $d \in \{3, 4, 5\}$, s stopnjo k in s presečnim številom $a_1 = 0$. Predpostavimo, da Γ ima lastno vrednost θ z večkratnostjo k. V primeru, ko je $d = 5$, naj bo pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti tako, da je $\theta_2^* \neq \theta_3^*$. Potem je Γ 1-homogen.*

DOKAZ. Ker je graf Γ antipoden, je $a_d = 0$. Če je $d = 3$, je Γ 1-homogen po lemi 3.3.1. Naj bo sedaj $d = 4$. Ker je $a_1 = 0$, je zaradi antipodnosti tudi $a_3 = 0$. Graf Γ je zopet 1-homogen po lemi 3.3.1. Vzemimo sedaj, da je $d = 5$. Ker je $a_1 = 0$, je tudi $a_4 = 0$. Če je vsaj še eno od števil a_2 in a_3 enako 0, potem je Γ 1-homogen po lemi 3.3.1, zato predpostavimo $a_2 \neq 0$ in $a_3 \neq 0$. V tem primeru pa je Γ 1-homogen po izreku 4.3.6 in izreku 3.2.5 (v izreku 4.3.6 vzamemo $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = 3$ in $\ell_3 \in \{2, 3\}$). ■

4.3.3 Neskončna družina razdaljno-regularenih grafov premera 5

V Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 417] je podana neskončna družina dopustnih presečnih tebel, ki ustrezajo antipodnim razdaljno-regularnim grafom indeksa 2 in premera 5:

$$\{2\mu^2 + \mu, 2\mu^2 + \mu - 1, \mu^2, \mu, 1; 1, \mu, \mu^2, 2\mu^2 + \mu - 1, 2\mu^2 + \mu\} \quad (\mu \in \mathbb{N}). \tag{4.19}$$

Za $\mu = 1$ dobimo dodekaeder, graf s presečno tabelo (4.19) za $\mu = 2$ pa ne obstaja (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 11.4.5]). V tem podrazdelku bomo pokazali, da je vsak razdaljno-regularen graf s presečno tabelo (4.19) 1-homogen. Izračunali bomo tudi parametre ustrezne particije. Na koncu pa bomo pokazali, da razdaljno-regularna grafa s presečno tabelo (4.19) za $\mu = 2$ in $\mu = 4$ ne obstajata. Za razliko od dokaza Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 11.4.5] pri dokazu neobstoja razdaljno-regularnega grafa s presečno tabelo (4.19) za $\mu = 2$ ne bomo uporabili strukture njegovega antipodnega kvocienta, to je Gewirtzovega grafa.

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf s presečno tabelo (4.19). Potem ima $4\mu^2(2\mu + 3)$ vozlišč, njegov antipodni kvocient pa je krepko regularen graf s parametri $n' = 2\mu^2(2\mu + 3)$, $k' = 2\mu^2 + \mu$, $\lambda' = 0$ in $\mu' = \mu$. Ker za Γ velja $a_1 = a_4 = 0$ in $a_2 = a_3 = \mu^2 \neq 0$, graf Γ ni Q-polinomski - glej posledico 5.1.9. Graf Γ ima lastni vrednosti $\pm\theta$, kjer je $\theta = \mu\sqrt{2\mu + 3}$, z večkratnostjo $k = 2\mu^2 + \mu$. Zaporedje dualnih lastnih vrednosti, ki pripada lastni vrednosti θ, je podano z

$$\theta_0^* = 1, \;\; \theta_1^* = \frac{\sqrt{2\mu+3}}{2\mu+1}, \;\; \theta_2^* = \frac{1}{2\mu+1}, \;\; \theta_3^* = -\frac{1}{2\mu+1}, \;\; \theta_4^* = -\frac{\sqrt{2\mu+3}}{2\mu+1}, \;\; \theta_5^* = -1.$$

Po posledici 4.3.8, je graf s presečno tabelo (4.19) 1-homogen. Izračunajmo parametre razdaljne particije glede na par sosednjih vozlišč grafa Γ, kot je nakazano v izreku 4.3.6. Za poljubna vozlišča x, y, z grafa Γ, kjer je $\partial(x, y) = 1$, označimo $S_j^i = S_j^i(x, y, z) = \Gamma(z) \cap D_j^i(x, y)$.

Naj bo $z \in D_2^2(x, y)$ in naj bodo $z_1, \ldots, z_{2\mu^2+\mu}$ sosedi vozlišča z. Označimo $m = |S_2^2|$. Potem imamo

$$|S_1^2(x, y, z)| = |S_2^1(x, y, z)| = c_2 = \mu,$$

$$|S_2^3(x, y, z)| = |S_3^2(x, y, z)| = a_2 - c_2 - m = \mu^2 - \mu - m,$$

$$|S_3^3(x, y, z)| = b_2 - |S_2^3(x, y, z)| = m + \mu,$$

Vse ostale množice S^i_j so prazne. Brez škode za splošnost lahko privzamemo

$$S_1^2(x,y,z) = \{z_1,\ldots,z_\mu\}, \quad S_2^1(x,y,z) = \{z_{\mu+1},\ldots,z_{2\mu}\},$$

$$S_2^2(x,y,z) = \{z_{2\mu+1},\ldots,z_{2\mu+m}\}, \quad S_2^3(x,y,z) = \{z_{2\mu+m+1},\ldots,z_{\mu^2+\mu}\},$$

$$S_3^2(x,y,z) = \{z_{\mu^2+\mu+1},\ldots,z_{2\mu^2-m}\}, \quad S_3^3(x,y,z) = \{z_{2\mu^2-m+1},\ldots,z_{2\mu^2+\mu}\}.$$

Naj bo E glavni idempotent grafa Γ, ki pripada lastni vrednosti θ. Za poljubno vozlišče $v \in V\Gamma$ naj bo $\overline{v} = Ev$. Potem imamo po lemi 4.3.5

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= C_2\left(\overline{z_1}+\cdots+\overline{z_\mu}\right) + A_2\left(\overline{z_{\mu+1}}+\cdots+\overline{z_{\mu^2+\mu}}\right) + B_2\left(\overline{z_{\mu^2+\mu+1}}+\cdots+\overline{z_{2\mu^2+\mu}}\right)\\
\overline{x} &= \quad C_2\left(\overline{z_{\mu+1}}+\cdots+\overline{z_{2\mu}}\right)\\
&\quad + A_2\left(\overline{z_1}+\cdots+\overline{z_\mu}+\overline{z_{2\mu+1}}+\cdots+\overline{z_{2\mu+m}}+\overline{z_{\mu^2+\mu+1}}+\cdots+\overline{z_{2\mu^2-m}}\right)\\
&\quad + B_2\left(\overline{z_{2\mu+m+1}}+\cdots+\overline{z_{\mu^2+\mu}}+\overline{z_{2\mu^2-m+1}}+\cdots+\overline{z_{2\mu^2+\mu}}\right),
\end{aligned}$$

kjer je

$$C_2 = \frac{\mu+1}{\mu\sqrt{2\mu+3}}, \qquad A_2 = \frac{3+2\mu-\sqrt{2\mu+3}}{2\mu(2\mu+3)}, \qquad B_2 = -\frac{3+2\mu+\sqrt{2\mu+3}}{2\mu(2\mu+3)}.$$

Skalarni produkt $\langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ smo izračunali že v (4.15) in (4.16). Iz enačbe $\langle\overline{x},\overline{y}\rangle = (k/|V\Gamma|)\theta_1^*$ pa naposled dobimo $m = \mu(\mu-1)/2$.

Naj bo sedaj $w \in D_3^3$. Ker je Γ antipoden graf indeksa 2, je $|\Gamma(w) \cap D_3^3| = |\Gamma(z) \cap D_2^2| = \mu(\mu-1)/2$, kjer je $z \in D_2^2$. Ker vemo, da je graf Γ 1-homogen, lahko sedaj vse ostale parametre particije vozlišč grafa Γ glede na razdaljo od para sosednjih vozlišč x, y izračunamo s preprostim argumentom dvojnega štetja. Parametre te particije lahko vidimo na sliki 4.2

Dokažimo sedaj še en potreben pogoj, ki ga morajo izpolnjevati razdaljno-regularni grafi s presečno tabelo (4.19) za $\mu > 1$. Ta pogoj nam bo v veliko pomoč pri dokazovanju izreka 4.3.10, v katerem bomo dokazali, da razdaljno-regularen graf s presečno tabelo (4.19) ne more obstajati, če je μ enak 2 ali 4. Naj bo torej Γ razdaljno-regularen graf s presečno tabelo (4.19) za $\mu > 1$. Naj bo x vozlišče grafa Γ in $z \in \Gamma_2(x)$. Vozlišče z ima v $\Gamma_2(x)$ še $a_2 = \mu^2$ sosedov. Označimo jih z $z_1, z_2, \ldots, z_{a_2}$. Izberimo si $v_1, v_2 \in \{z_1, \ldots, z_{a_2}\}$, $v_1 \neq v_2$. Za naravna števila ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 $(1 \leq \ell_1, \ell_2, \ell_3 \leq 3)$ naj bo

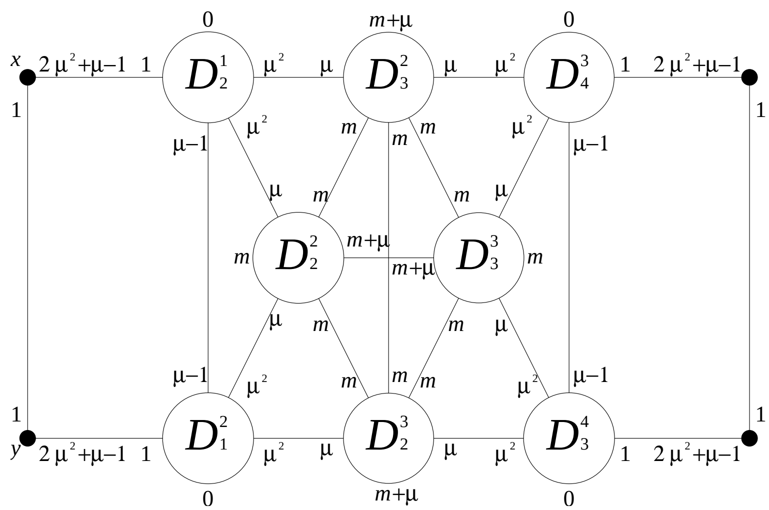
$$S(\ell_1,\ell_2,\ell_3) = \Gamma(x) \cap \Gamma_{\ell_1}(z) \cap \Gamma_{\ell_2}(v_1) \cap \Gamma_{\ell_3}(v_2).$$

Označimo

$$\gamma_j = |S(2,j,1)|, \quad \alpha_j = |S(2,j,2)|, \quad \beta_j = |S(2,j,3)| \quad (1 \leq j \leq 3)$$

in

$$\omega = |S(3,2,2)|.$$



Slika 4.2: Razdaljna particija vozlišč grafa s presečno tabelo (4.19) glede na razdaljo od para sosednjih vozlišč x, y.

Ker je Γ 1-homogen, dobimo še $|S(1,2,2)| = \mu$, $|S(3,2,3)| = m-\omega$, $|S(3,3,2)| = m-\omega$ in $|S(3,3,3)| = \mu+\omega$. Vse ostale množice $S(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$ so prazne. Ker je Γ 1-homogen, pa velja tudi

$$\begin{aligned} \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 &= |S_1^2(z,v_2,x)| = \mu, & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= |S_2^2(z,v_2,x)| = m,\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 &= |S_3^2(z,v_2,x)| = m, & \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 &= |S_1^2(z,v_1,x)| = \mu,\\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 &= |S_2^2(z,v_1,x)| = m, & \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 &= |S_3^2(z,v_1,x)| = m. \end{aligned}$$

Naj bo $i \in \{1,2\}$. Po lemi 4.3.5 je

$$Ev_i = C_2\Big(\sum_{v\in\Gamma(x)\cap\Gamma(v_i)} Ev\Big) + A_2\Big(\sum_{v\in\Gamma(x)\cap\Gamma_2(v_i)} Ev\Big) + B_2\Big(\sum_{v\in\Gamma(x)\cap\Gamma_3(v_i)} Ev\Big).$$

Seveda je

$$\Gamma(x)\cap\Gamma(v_1) = \bigcup_{\ell_1,\ell_3\in\{1,2,3\}} S(\ell_1,1,\ell_3),\quad \Gamma(x)\cap\Gamma_2(v_1) = \bigcup_{\ell_1,\ell_3\in\{1,2,3\}} S(\ell_1,2,\ell_3),$$

$$\Gamma(x)\cap\Gamma_3(v_1) = \bigcup_{\ell_1,\ell_3\in\{1,2,3\}} S(\ell_1,3,\ell_3),\quad \Gamma(x)\cap\Gamma(v_2) = \bigcup_{\ell_1,\ell_2\in\{1,2,3\}} S(\ell_1,\ell_2,1),$$

$$\Gamma(x)\cap\Gamma_2(v_2) = \bigcup_{\ell_1,\ell_2\in\{1,2,3\}} S(\ell_1,\ell_2,2),\quad \Gamma(x)\cap\Gamma_3(v_2) = \bigcup_{\ell_1,\ell_2\in\{1,2,3\}} S(\ell_1,\ell_2,3).$$

Torej je $\langle\overline{v_1},\overline{v_2}\rangle = (k/|V\Gamma|)(U\theta_2^* + V\theta_0^*)$, kjer je

$$V = A_2^2(\mu+\alpha_2+\omega) + B_2^2(\beta_3+\mu+\omega) + C_2^2\gamma_1$$

$$+A_2B_2(2m-2\omega+\beta_2+\alpha_3)+B_2C_2(\beta_1+\gamma_3)+A_2C_2(\gamma_2+\alpha_1),$$

$$U+V=(a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2)^2=\big((2m+\mu)(A_2+B_2)+\mu C_2\big)^2.$$

Po drugi strani pa mora biti $\langle\overline{v_1},\overline{v_2}\rangle=(k/|V\Gamma|)\theta_2^*$. Tako dobimo

$$(\gamma_3-\alpha_1)(\sqrt{2\mu+3}+1)=-\mu^2+\gamma_1\mu+\gamma_1+2\alpha_2+2\omega+\mu. \tag{4.20}$$

Opomba. Enačba (4.20) nam da v primeru, ko je $\sqrt{2\mu+3}$ iracionalno število, dva pogoja, namreč $\gamma_3=\alpha_1$ in $-\mu^2+\gamma_1\mu+\gamma_1+2\alpha_2+2\omega+\mu=0$. V primeru, ko pa je $\sqrt{2\mu+3}$ celo število, pa je pogoj en sam. To je tudi razlog, zakaj znamo (kot bomo videli v nadaljevanju) dokazati neobstoj razdaljno-regularnega grafa s presečno tabelo (4.19) za $\mu=2$ in $\mu=4$, medtem ko neobstoja razdaljno-regularnega grafa s presečno tabelo (4.19) za $\mu=3$ (vsaj zaenkrat) ne znamo dokazati.

Pokažimo sedaj naslednjo lemo.

Lema 4.3.9 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf s presečno tabelo* (4.19). *Izberimo si $x\in V\Gamma$ in $z\in\Gamma_2(x)$. Potem obstajajo paroma različna vozlišča $\{v_1,\ldots,v_\mu\}\subseteq\Gamma_2(x)\cap\Gamma(z)$, ki imajo skupnega soseda v $\Gamma(x)$.*

Dokaz. Ker je $|\Gamma(x)\cap\Gamma_2(z)|=a_2=\mu^2\neq 0$, si lahko izberemo $w\in\Gamma(x)\cap\Gamma_2(z)$. Ker je $\partial(w,z)=2$, imata w in z natanko μ skupnih sosedov. Toda ker Γ nima trikotnikov, so ti skupni sosedi vsi v $\Gamma_2(x)$. ■

Izrek 4.3.10 *Razdaljno-regularen graf s presečno tabelo*

$$\{10,9,4,2,1;1,2,4,9,10\}\quad \textit{ali}\quad \{36,35,16,4,1;1,4,16,35,36\}$$

ne obstaja.

Dokaz. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf s presečno tabelo (4.19) za $\mu=2$, torej razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{10,9,4,2,1;1,2,4,9,10\}$. Naj bo $x\in V\Gamma$ in $z\in\Gamma_2(x)$. Ker je $\sqrt{7}$ iracionalno število, dobimo iz enačbe (4.20) dva pogoja: $\gamma_3=\alpha_1$ in

$$2=3\gamma_1+2(\alpha_2+\omega).$$

Torej mora biti $\gamma_1=0$ za vsak par različnih vozlišč iz $\Gamma_2(x)\cap\Gamma(z)$. To pa seveda po lemi 4.3.9 ni mogoče.

Vzemimo sedaj, da ima Γ presečno tabelo (4.19) za $\mu=4$, torej $\{36,35,16,4,1;1,4,16,35,36\}$. Zopet si izberimo $x\in V\Gamma$ in $z\in\Gamma_2(x)$. Ker je $\sqrt{11}$ iracionalno število, dobimo iz enačbe 4.20 zopet 2 pogoja: $\gamma_3=\alpha_1$ in

$$12=5\gamma_1+2(\alpha_2+\omega).$$

Torej mora biti γ_1 sodo število. Po lemi 4.3.9 obstajajo paroma različna vozlišča

$$v_1,v_2,v_3,v_4\in\Gamma_2(x)\cap\Gamma(z),$$

ki imajo skupnega soseda $w \in \Gamma(x) \cap \Gamma_2(z)$. Torej je $\gamma_1 \geq 1$ za vsak par različnih vozlišč iz $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Ker je γ_1 sodo število, to pomeni $\omega \in \{0, 1\}$ za vsak par različnih vozlišč iz $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Naj bo $P = \Gamma(x) \cap \Gamma_3(z)$ in $P_i = P \cap \Gamma_2(v_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$. Ni se težko prepričati, da je $|P| = 16$ in $|P_i| = 6$ $(1 \leq i \leq 4)$. Ker je $\omega \in \{0, 1\}$, je $|P_i \cap P_j| \leq 1$ $(1 \leq i < j \leq 4)$. Toda to ni mogoče, saj je $4 \times 6 - \binom{4}{2} = 18 > 16$. Izrek je tako dokazan. ■

Razdelek zaključimo z dvema domnevama.

Domneva 4.3.11 *Naj bo* Γ *razdaljno-regularen graf stopnje* k*, premera* $d \geq 3$ *in s presečnim številom* $a_1 = 0$*. Naj bo* θ *lastna vrednost grafa* Γ *z večkratnostjo* k*. Potem je* Γ 1*-homogen, in v primeru ko* Γ *ni dvodelen, je* $\theta \in \{\theta_1, \theta_d\}$*.*

Domneva 4.3.12 *Razdaljno-regularen graf s presečno tabelo* (4.19) *obstaja natanko takrat, ko je* $\mu = 1$*.*

Poglavje 5

Ekvitabilne particije in Q-polinomski razdaljno-regularni grafi

V tem poglavju bodo predmet našega raziskovanja Q-polinomski razdaljno-regularni grafi. Ukvarjali se bomo predvsem z iskanjem ekvitabilnih particij le-teh. Videli bomo, da v nekaterih primerih lahko pokažemo, da so Q-polinomski razdaljno-regularni grafi 1-homogeni. V nekaterih drugih primerih pa spet lahko pokažemo, da ti grafi premorejo kakšno drugo ekvitabilno particijo. Kot smo videli v razdelku 2.4, je raziskovanje Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov pomembno v luči klasifikacije le-teh, torej v luči problema, ki ga je predlagal Bannai.

Zakaj pa je iskanje ekvitabilnih particij grafov sploh pomembno? Recimo, da je $C_1, \ldots, C_r$ ekvitabilna particija vozlišč grafa Γ. Ker ima vsako vozlišče iz množice C_i v množici C_j natanko c_{ij} sosedov, vsako vozlišče iz C_j pa v množici C_i natanko c_{ji} sosedov, mora veljati

$$|C_i| c_{ij} = |C_j| c_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq r).$$

Ker pa je podgraf grafa Γ, ki ga inducira množica C_i $(1 \leq i \leq r)$ regularen, mora seveda biti število $|C_i| c_{ii}$ sodo. V mnogih primerih nam gornje enačbe predstavljajo potrebne pogoje, katerim morajo zadoščati presečna števila razdaljno-regularnega grafa. Z njihovo pomočjo lahko upamo na klasifikacijo nekaterih družin razdaljno-regularnih grafov, v nekaterih primerih pa z njimi lahko dokažemo neobstoj potencialnih razdaljno-regularnih grafov.

Še en razlog, zakaj so ekvitabilne particije pomembne, pa je seveda konstrukcija kvocientnih grafov. Kot smo opisali že v poglavju 3 (glej razdelek 3.1), lahko s pomočjo ekvitabilne particije vozlišč grafa konstruiramo kvocientni graf. Seveda pa ima kvocientni graf mnogo lastnosti enakih kot originalen graf (naprimer lastne vrednosti ter lastne vektorje). Do teh lastnosti pa pridemo dosti lažje s študiranjem kvocientnega grafa, kot pa originalnega.

Opišimo na kratko rezultate tega poglavja. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf.

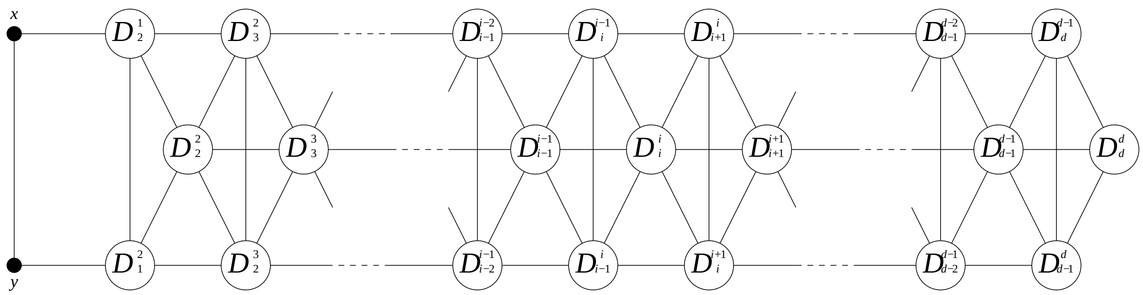
V primeru, ko je presečno število a_1 grafa Γ različno od 0, nam izreka 3.3.3 in 3.3.4 ponujata izjemno močni orodji za ugotavljanje 1-homogenosti grafa Γ. Ko pa je $a_1 = 0$, nam zgoraj omenjena izreka ne pomagata več. V prvem razdelku se bomo zato posvetili Q-polinomskim razdaljno-regularnim grafom brez trikotnikov, torej Q-polinomskim razdaljno-regularnim grafom s presečnim številom $a_1 = 0$. Za te grafe bomo pokazali, da so 1-homogeni, rezultati pa so povzeti po članku [35].

Izkaže se, da je pogoj $a_1 = 0$ v prvem razdelku tega poglavja potreben. Kot bomo videli, obstajajo Q-polinomski razdaljno-regularni grafi, ki imajo $a_1 \neq 0$ in niso 1-homogeni. Vendar pa v nekem smislu rezultate prvega razdelka lahko posplošimo na nekatere razdaljno-regularne grafe z $a_1 \neq 0$. V drugem razdelku bomo tako obravnavali Q-polinomske razdaljno-regularne grafe, ki sicer lahko imajo trikotnike, nimajo pa določenih struktur, ki jih bomo poimenovali *zmaji*. Glavni rezultat drugega razdelka je, da je Q-polinomski razdaljno-regularen graf brez zmajev bodisi 1-homogen, bodisi je zelo "blizu" 1-homogenemu grafu. Premore namreč tako particijo vozlišč, ki je le nekoliko finejša od razdaljne particije glede na par sosednjih vozlišč grafa. Drugi razdelek je povzet po članku [36].

Poglavje bomo zaključili z raziskovanjem dvodelnih Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov s presečnim številom $c_2 = 1$. Kot je pokazala H. Lewis [30, Corollary 30], ima najkrajši cikel v Q-polinomskem razdaljno-regularnem grafu dolžino kvečjemu 6. Glede na to je torej naravno vprašanje klasifikacije Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov, v katerih imajo najkrajši cikli dolžino 6. Imenujmo razdaljno-regularen graf Γ premera d *skoraj dvodelen*, če njegova presečna števila zadoščajo pogoju $a_i = 0$ $(0 \leq i \leq d-1)$ in $a_d \neq 0$. Kot se izkaže, je vsak Q-polinomski graf v katerem je dolžina najkrajšega cikla enaka 6, bodisi dvodelen bodisi skoraj dvodelen. Ker so po lemi 3.3.1 dvodelni in skoraj dvodelni razdaljno-regularni grafi tudi 1-homogeni, se bomo v tem primeru vprašali, ali so mogoče ti grafi tudi 2-homogeni. V primeru dvodelnih Q-polinomskih razdaljno regularnih grafov s presečnim številom $c_2 = 1$ bomo videli, da je odgovor na to vprašanje negativen. Dokazali pa bomo, da so ti grafi zelo "blizu" 2-homogenim grafom. Premorejo namreč ekvitabilno particijo vozlišč, ki je le nekoliko finejša od particije glede na razdaljo od para dveh vozlišč x, y, ki sta na razdalji 2. Ta razdelek je povzet po članku [37]. Pri nastajanju člankov [35], [36] in [37] mi je bil z nasveti v veliko pomoč P. Terwilliger.

5.1 Q-polinomski razdaljno-regularni grafi brez trikotnikov

Kot smo že napovedali, bomo v tem razdelku pokazali, da so vsi Q-polinomski razdaljno-regularni grafi brez trikotnikov (oziroma s presečnim številom $a_1 = 0$) 1-homogeni. Rezultat bomo dokazali s pomočjo Terwilligerjeve karakterizacije Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov, glej izrek 2.4.2. Ker so razdaljno-regularni grafi s stopnjo $k = 2$ natanko cikli (ki so očitno 1-homegeni), bomo privzeli $k \geq 3$. Razdaljno-regularni grafi premera 2 ter s presečnim številom $a_1 = 0$ pa so 1-homogeni po lemi 3.3.1, zato privzemimo tudi, da je premer $d \geq 3$. Naj bo Γ torej Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, stopnje $k \geq 3$ in s presečnim številom $a_1 = 0$. Naj bosta $x, y \in V\Gamma$ sosednji vozlišči grafa Γ. Z D_j^i označimo množico $D_j^i(x,y)$ $(1 \leq i, j \leq d)$. Particijo vozlišč grafa Γ glede na razdaljo od vozlišč $x, y \in V\Gamma$ grafično prikažemo na sliki 5.1



Slika 5.1: Razdaljna particija vozlišč grafa Γ glede na par sosednjih vozlišč x, y.

Po izreku 3.2.5 je Γ 1-homogen, če za $z_1 \in D_i^{i-1}$, $z_2 \in D_{i-1}^i$ in $z_3 \in D_i^i$ $(2 \leq i \leq d)$ števila $|\Gamma(z_1) \cap D_{i-1}^{i-1}|$, $|\Gamma(z_2) \cap D_{i-1}^{i-1}|$, $|\Gamma(z_3) \cap D_{i-1}^{i-1}|$ in $|\Gamma(z_3) \cap D_{i+1}^{i+1}|$ niso odvisna od izbire vozlišč x, y, z_1, z_2 in z_3. Prav to bomo pokazali v naslednjih treh lemah.

Lema 5.1.1 *Naj bo Γ razdaljno regularen graf s premerom $d \geq 3$, stopnjo $k \geq 3$ in presečnim številom $a_1 = 0$. Naj bo E glavni idempotent grafa Γ in naj bo $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Če je Γ Q-polinomski glede na E, potem za vsak i $(2 \leq i \leq d)$ in za vsak $z \in D_i^{i-1} \cup D_{i-1}^i$ velja*

$$|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}| = a_{i-1} \frac{(\theta_1^* - \theta_i^*)(\theta_{i-1}^* - \theta_1^*) + (\theta_2^* - \theta_i^*)(\theta_0^* - \theta_{i-1}^*)}{(\theta_0^* - \theta_{i-1}^*)(\theta_{i-1}^* - \theta_i^*)}.$$

DOKAZ. Da je imenovalec zgornje formule neničelen, nam zagotavlja lema 2.4.1. Za $i = 2$ trditev očitno drži, saj vozlišče $z \in D_2^1 \cup D_1^2$ nima nobenega soseda v množici $D_1^1 = \emptyset$. Zato privzemimo, da je $3 \leq i \leq d$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo tudi $z \in D_i^{i-1}$, saj v primeru $z \in D_{i-1}^i$ dokaz poteka povsem analogno. Označimo $\rho = |\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}|$ in $\tau = |\Gamma(z) \cap D_i^{i-1}|$. Ker je $\Gamma_{i-1}(x)$ disjunktna unija množic D_i^{i-1}, D_{i-1}^{i-1} in D_{i-2}^{i-1}, in ker je $\Gamma(z) \cap \Gamma_{i-1}(x) \subseteq D_i^{i-1} \cup D_{i-1}^{i-1}$, je $\rho + \tau = a_{i-1}$. Ker je Γ Q-polinomski, po izreku 2.4.2 dobimo

$$\sum_{\substack{w \in V\Gamma \\ \partial(x,w)=i-1 \\ \partial(z,w)=1}} Ew \; - \sum_{\substack{w \in V\Gamma \\ \partial(x,w)=1 \\ \partial(z,w)=i-1}} Ew = a_{i-1} \frac{\theta_{i-1}^* - \theta_1^*}{\theta_0^* - \theta_{i-1}^*}(Ex - Ez). \tag{5.1}$$

Ker je $D_1^1 = \emptyset$, je $\{w \in V\Gamma \mid \partial(x,w) = 1,\ \partial(z,w) = i-1\} \subseteq D_2^1$. Torej so vsa vozlišča te množice na razdalji 2 od vozlišča y. Pomnožimo sedaj enačbo (5.1) skalarno z $(|V\Gamma|/m)Ey$, kjer je m večkratnost lastne vrednosti prirejene glavnemu idempotentu E, ter uporabimo lemo 2.3.5(i). Dobimo

$$\rho\theta^*_{i-1} + \tau\theta^*_i - a_{i-1}\theta^*_2 = a_{i-1}\frac{\theta^*_{i-1} - \theta^*_1}{\theta^*_0 - \theta^*_{i-1}}(\theta^*_1 - \theta^*_i).$$

Če pa upoštevamo še $\tau = a_{i-1} - \rho$, dobimo

$$\rho = |\Gamma(z) \cap D^{i-1}_{i-1}| = a_{i-1}\frac{(\theta^*_1 - \theta^*_i)(\theta^*_{i-1} - \theta^*_1) + (\theta^*_2 - \theta^*_i)(\theta^*_0 - \theta^*_{i-1})}{(\theta^*_0 - \theta^*_{i-1})(\theta^*_{i-1} - \theta^*_i)}.$$

Lema je tako dokazana. ■

Lema 5.1.2 *Naj bo Γ razdaljno regularen graf s premerom $d \geq 3$, stopnjo $k \geq 3$ in presečnim številom $a_1 = 0$. Naj bo E glavni idempotent grafa Γ in naj bo $\theta^*_0, \theta^*_1, \ldots, \theta^*_d$ pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Če je Γ Q-polinomski glede na E, potem za vsak i $(2 \leq i \leq d)$ in za vsak $z \in D^i_i$ velja*

$$|\Gamma(z) \cap D^{i-1}_{i-1}| = c_i\frac{(\theta^*_1 - \theta^*_i)(\theta^*_{i-1} - \theta^*_1) + (\theta^*_2 - \theta^*_i)(\theta^*_0 - \theta^*_i)}{(\theta^*_0 - \theta^*_i)(\theta^*_{i-1} - \theta^*_i)}.$$

DOKAZ. Zopet nam lema 2.4.1 zagotavlja, da je imenovalec zgornje formule neničelen. Tudi v tem primeru lema velja za $i = 2$, saj je $D^1_1 = \emptyset$. Zato privzemimo $3 \leq i \leq d$. Zopet označimo $\rho = |\Gamma(z) \cap D^{i-1}_{i-1}|$ in $\tau = |\Gamma(z) \cap D^{i-1}_i|$. Podobno kot pri prejšnji lemi premislimo, da je $\rho + \tau = c_i$. Ker je Γ Q-polinomski, po izreku 2.4.2 dobimo

$$\sum_{\substack{w \in V\Gamma \\ \partial(x,w)=i-1 \\ \partial(z,w)=1}} Ew - \sum_{\substack{w \in V\Gamma \\ \partial(x,w)=1 \\ \partial(z,w)=i-1}} Ew = c_i\frac{\theta^*_{i-1} - \theta^*_1}{\theta^*_0 - \theta^*_i}(Ex - Ez). \tag{5.2}$$

Ker je $D^1_1 = \emptyset$, je tudi tokrat $\{w \in V\Gamma \mid \partial(x,w) = 1,\ \partial(z,w) = i-1\} \subseteq D^1_2$. Če enačbo (5.2) skalarno pomnožimo z $(|V\Gamma|/m)Ey$, kjer je m večkratnost lastne vrednosti prirejene glavnemu idempotentu E, in uporabimo lemo 2.3.5(i), dobimo

$$\tau\theta^*_i + \rho\theta^*_{i-1} - c_i\theta^*_2 = c_i\frac{\theta^*_{i-1} - \theta^*_1}{\theta^*_0 - \theta^*_i}(\theta^*_1 - \theta^*_i).$$

Ker pa je $\tau = c_i - \rho$, dobimo

$$\rho = |\Gamma(z) \cap D^{i-1}_{i-1}| = c_i\frac{(\theta^*_1 - \theta^*_i)(\theta^*_{i-1} - \theta^*_1) + (\theta^*_2 - \theta^*_i)(\theta^*_0 - \theta^*_i)}{(\theta^*_0 - \theta^*_i)(\theta^*_{i-1} - \theta^*_i)}.$$

Lema je tako dokazana. ■

Lema 5.1.3 *Naj bo Γ razdaljno regularen graf s premerom $d \geq 3$, stopnjo $k \geq 3$ in presečnim številom $a_1 = 0$. Naj bo E glavni idempotent grafa Γ in naj bo $\theta^*_0, \theta^*_1, \ldots, \theta^*_d$*

pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Če je Γ *Q-polinomski glede na* E, *potem za vsak* i $(2 \leq i \leq d-1)$ *in za vsak* $z \in D_i^i$ *velja*

$$|\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}| = b_i \frac{(\theta_1^* - \theta_i^*)(\theta_{i+1}^* - \theta_1^*) + (\theta_2^* - \theta_i^*)(\theta_0^* - \theta_i^*)}{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*)}.$$

DOKAZ. Tudi v tem primeru nam lema 2.4.1 zagotavlja, da je imenovalec v zgornji formuli neničelen. Naj bo $\rho = |\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}|$ in $\tau = |\Gamma(z) \cap D_i^{i+1}|$. Spet se ni težko prepričati, da velja $\rho + \tau = b_i$. Po izreku 2.4.2 tokrat dobimo

$$\sum_{\substack{w \in V\Gamma \\ \partial(x,w)=i+1 \\ \partial(z,w)=1}} Ew - \sum_{\substack{w \in V\Gamma \\ \partial(x,w)=1 \\ \partial(z,w)=i+1}} Ew = b_i \frac{\theta_{i+1}^* - \theta_1^*}{\theta_0^* - \theta_i^*}(Ex - Ez). \tag{5.3}$$

Spet opazimo, da je $\{w \in V\Gamma \mid \partial(x,w) = 1,\ \partial(z,w) = i+1\} \subseteq D_2^1$. Če torej enačbo (5.3) skalarno pomnožimo z $(|V\Gamma|/m)Ey$, kjer je m večkratnost lastne vrednosti prirejene glavnemu idempotentu E, in upoštevamo lemo 2.3.5(i), dobimo

$$\tau\theta_i^* + \rho\theta_{i+1}^* - b_i\theta_2^* = b_i \frac{\theta_{i+1}^* - \theta_1^*}{\theta_0^* - \theta_i^*}(\theta_1^* - \theta_i^*).$$

Ker pa je $\tau = b_i - \rho$, dobimo še

$$\rho = |\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}| = b_i \frac{(\theta_1^* - \theta_i^*)(\theta_{i+1}^* - \theta_1^*) + (\theta_2^* - \theta_i^*)(\theta_0^* - \theta_i^*)}{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*)}.$$

Lema je tako dokazana. ∎

Izkaže se, da lahko formule podane z lemama 5.1.2 in 5.1.3 še nekoliko poenostavimo. Caughman je namreč dokazal naslednjo lemo.

Lema 5.1.4 (Caughman [8, Lemma 8.2]) *Naj bo* Γ *razdaljno regularen graf s premerom* $d \geq 3$ *in stopnjo* $k \geq 3$. *Naj bo* E *glavni idempotent grafa* Γ *in naj bo* $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ *pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Če je* Γ *Q-polinomski glede na* E, *potem za vsak* i $(1 \leq i \leq d-1)$ *velja*

$$(\theta_2^* - \theta_i^*)(\theta_0^* - \theta_i^*) = (\theta_1^* - \theta_{i+1}^*)(\theta_1^* - \theta_{i-1}^*).$$

∎

S pomočjo te leme pa hitro dobimo naslednji rezultat.

Lema 5.1.5 *Naj bo* Γ *razdaljno regularen graf s premerom* $d \geq 3$, *stopnjo* $k \geq 3$ *in presečnim številom* $a_1 = 0$. *Naj bo* E *glavni idempotent grafa* Γ *in naj bo* $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ *pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Če je* Γ *Q-polinomski glede na* E, *potem za vsak* i $(2 \leq i \leq d-1)$ *in za vsak* $z \in D_i^i$ *velja:*

$$|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}| = c_i \frac{(\theta_1^* - \theta_{i-1}^*)(\theta_i^* - \theta_{i+1}^*)}{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_{i-1}^* - \theta_i^*)};$$

$$|\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}| = b_i \frac{(\theta_1^* - \theta_{i+1}^*)(\theta_{i-1}^* - \theta_i^*)}{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_i^* - \theta_{i+1}^*)}.$$

DOKAZ. Formule podane z lemama 5.1.2 in 5.1.3 poenostavimo s pomočjo leme 5.1.4. ■

Sedaj pa nam ne bo težko dokazati glavnega izreka tega razdelka.

Izrek 5.1.6 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, stopnje $k \geq 3$ in s presečnim številom $a_1 = 0$. Če je Γ Q-polinomski, potem je 1-homogen.*

DOKAZ. Neposredno iz leme 5.1.1, leme 5.1.2, leme 5.1.3 in leme 3.2.5. ■

Naj pripomnimo, da obrat izreka 5.1.6 ne drži: če je graf Γ 1-homogen graf s presečnim številom $a_1 = 0$, potem ni nujno tudi Q-polinomski. Tako so naprimer Coxeterjev graf premera 4 (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 12.3]), dodekaeder premera 5 in Biggs-Smithov graf premera 7 (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 13.4]) 1-homogeni grafi s presečnim številom $a_1 = 0$, ki pa niso Q-polinomski, glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 6.10]. Po drugi strani pa je predpostavka $a_1 = 0$ potrebna. Grafi Hermitskih form (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.5.C] so Q-polinomski razdaljno-regularni grafi z $a_1 \neq 0$, ki pa niso 1-homogeni (glej podrazdelek 5.1.2).

Pokažimo sedaj nekaj zanimivih posledic leme 5.1.5.

Posledica 5.1.7 *Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, stopnje $k \geq 3$ in s presečnim številom $a_1 = 0$. Privzemimo, da obstaja tak i ($2 \leq i \leq d-1$), da je $a_i \neq 0$. Potem velja:*

(i) *za vsak $z \in D_i^i$ je $|\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}| \neq 0$,*

(ii) *$D_{i+1}^{i+1} \neq \emptyset$,*

(iii) *$a_{i+1} \neq 0$.*

DOKAZ. (i) Naj bo Γ Q-polinomski glede na glavni idempotent E, $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ pa naj bo pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Če je $|\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}| = 0$, potem je po lemi 5.1.5 bodisi $\theta_1^* = \theta_{i+1}^*$ bodisi $\theta_{i-1}^* = \theta_i^*$. V obeh primerih je to v protislovju z lemo 2.4.1, ki pravi, da morajo biti dualne lastne vrednosti $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ paroma različne.
Točka (ii) posledice sedaj takoj sledi iz točke (i), točka (iii) pa iz točke (ii), saj je $|D_{i+1}^{i+1}| = a_{i+1}k_{i+1}/k$ po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 134]. ■

Posledica 5.1.8 *Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, stopnje $k \geq 3$ in s presečnim številom $a_1 = 0$. Privzemimo, da obstaja tak i ($3 \leq i \leq d-1$), da je $a_i \neq 0$. Potem velja:*

(i) *za vsak $z \in D_i^i$ je $|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}| \neq 0$,*

(ii) $D^{i-1}_{i-1} \neq \emptyset$,

(iii) $a_{i-1} \neq 0$.

DOKAZ. (i) Naj bo Γ Q-polinomski glede na glavni idempotent E, $\theta^*_0, \theta^*_1, \ldots, \theta^*_d$ pa naj bo pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Če je $|\Gamma(z) \cap D^{i-1}_{i-1}| = 0$, potem je po lemi 5.1.5 bodisi $\theta^*_1 = \theta^*_{i-1}$ bodisi $\theta^*_i = \theta^*_{i+1}$. V obeh primerih je to v protislovju z lemo 2.4.1, ki pravi, da morajo biti dualne lastne vrednosti $\theta^*_0, \theta^*_1, \ldots, \theta^*_d$ paroma različne.
Točka (ii) posledice sedaj sledi iz točke (i), točka (iii) pa iz točke (ii), ker je $|D^{i-1}_{i-1}| = a_{i-1}k_{i-1}/k$ po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 134]. ■

Kot smo omenili že v uvodu tega poglavja, bomo razdaljno-regularen graf Γ premera d imenovali *skoraj dvodelen*, če za njegova presečna števila velja, da je $a_i = 0$ za $1 \leq i \leq d-1$ in $a_d \neq 0$. Dokažimo sedaj naslednjo posledico, ki bo odigrala pomembno vlogo pri raziskovanju Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov z dolžino najkrajšega cikla enako 6 (glej razdelek 5.3).

Posledica 5.1.9 *Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, stopnje $k \geq 3$ in s presečnim številom $a_1 = 0$. Potem drži natanko ena od naslednjih trditev:*

(i) Γ *je dvodelen,*

(ii) Γ *je skoraj dvodelen,*

(iii) $a_i \neq 0$ *za* $i \in \{2, \ldots, d\}$.

DOKAZ. Če Γ ni dvodelen ali skoraj dvodelen, potem obstaja tak indeks $i \in \{2, \ldots, d-1\}$, da je $a_i \neq 0$. Rezultat sedaj sledi iz posledice 5.1.7 in posledice 5.1.8. ■

Oglejmo si sedaj nekaj primerov Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov z $a_1 = 0$. Predstavili bomo klasične razdaljno-regularne grafe s to lastnostjo, grafe Hermitskih form in Wittov graf M_{23}.

5.1.1 Razdaljno-regularni grafi s klasičnimi parametri

V nekaterih primerih se presečna števila razdaljno-regularnega grafa dajo opisati samo s premerom in še tremi drugimi parametri. Takim grafom pravimo razdaljno-regularni grafi s *klasičnimi parametri*. Podajmo natančnejšo definicijo. Za razdaljno-regularen graf Γ premera d pravimo, da ima *klasične parametre* (d, b, α, β), kadar presečna števila grafa Γ zadoščajo

$$c_i = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(1 + \alpha \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad (1 \leq i \leq d), \tag{5.4}$$

$$b_i = \left(\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right)\left(\beta - \alpha \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad (0 \leq i \leq d-1), \tag{5.5}$$

kjer je

$$\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} := 1 + b + b^2 + \cdots + b^{j-1}. \tag{5.6}$$

Kot nam pove Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 6.2.1], je število b celo število in $b \notin \{0, -1\}$. Naslednja lema nam opiše nekaj lastnosti razdaljno-regularnih grafov s klasičnimi parametri.

Lema 5.1.10 (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Corollary 8.4.2]) *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf s klasičnimi parametri (d, b, α, β), $d \geq 3$. Potem veljajo naslednje trditve.*

(i) *Število $\theta = \left[\begin{smallmatrix} d-1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right](\beta - \alpha) - 1$ je lastna vrednost grafa Γ.*

(ii) *Graf Γ je Q-polinomski glede na glavni idempotent, ki pripada lastni vrednosti θ.*

(iii) *Naj bo $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ zaporedje dualnih lastnih vrednosti, ki pripada lastni vrednosti θ. Potem obstajata taki realni števili γ in δ, da velja*

$$\theta_i^* = \gamma \begin{bmatrix} d-i \\ 1 \end{bmatrix} + \delta \quad \text{za vsak} \quad i \in \{0, \ldots, d\}.$$

■

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf s klasičnimi parametri in $x, y \in V\Gamma$ sosednji vozlišči. Označimo $D_j^i = D_j^i(x, y)$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Ker afina transformacija zaporedja dualnih lastnih vrednosti ne vpliva na formule podane v lemah 5.1.1, 5.1.2 in 5.1.3, iz zgornjih komentarjev takoj dobimo naslednjo posledico.

Posledica 5.1.11 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf s presečnim številom $a_1 = 0$ in s klasičnimi parametri (d, b, α, β). Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) *Za vsako naravno število i $(2 \leq i \leq d)$ in za vsako vozlišče $z \in D_i^{i-1} \cup D_{i-1}^i$ velja*

$$|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}| = 0.$$

(ii) *Za vsako naravno število i $(2 \leq i \leq d)$ in za vsako vozlišče $z \in D_i^i$ velja*

$$|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}| = c_i \frac{b^{i-2} - 1}{b^i - 1}, \quad \text{če je} \quad b \neq 1,$$

$$|\Gamma(z) \cap D_{i-1}^{i-1}| = c_i \frac{i-2}{i}, \quad \text{če je} \quad b = 1.$$

(iii) *Za vsako naravno število i $(2 \leq i \leq d-1)$ in za vsako vozlišče $z \in D_i^i$ velja*

$$|\Gamma(z) \cap D_{i+1}^{i+1}| = b_i.$$

■

Za konec razdelka predstavimo še družino hermitskih grafov z $r = 2$ in Wittov graf M_{23}. Vsi so razdaljno-regularni grafi s klasičnimi parametri in presečnim številom $a_1 = 0$ ter zato zadoščajo pogojem izreka 5.1.6.

5.1.2 Grafi hermitskih preslikav

Naj bo $q = r^2$, kjer je r potenca praštevila, in naj bo $\mathbb{F}_q$ končen obseg moči q. Za poljubno naravno število n označimo z $\mathbb{F}_q^n$ vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F}_q$ dimenzije n. Vozlišča grafa Γ hermitskih preslikav nad vektorskim prostorom $\mathbb{F}_q^n$ so vse hermitske matrike nad $\mathbb{F}_q$, ki so dimenzije $n \times n$. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, kadar je rang razlike ustreznih matrik enak 1. Grafi hermitskih preslikav so natančneje predstavljeni v Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.5 C], glej tudi [34, razdelek 3.5]. Premer d grafa Γ je enak n, presečna števila pa so podana z

$$b_j = \frac{q^d - q^j}{r+1}, \quad c_j = \frac{r^{j-1}(r^j - (-1)^j)}{r+1}, \quad 0 \leq j \leq d,$$

glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 9.5.7]. Ker je $a_i + b_i + c_i = k$ $(0 \leq i \leq d)$, dobimo še

$$a_i = \frac{r^{2i} - r^{2i-1} - (-r)^{i-1} - 1}{r+1} \quad (0 \leq i \leq d). \tag{5.7}$$

Grafi hermitskih preslikav so razdaljno-regularni grafi s klasičnimi parametri $(d, -r, -r-1, -(1+(-r)^d))$. Zato so po lemi 5.1.10 Q-polinomski glede na glavni idempotent, ki pripada lastni vrednosti

$$\theta = -\frac{r^{2d-1}+1}{r+1}.$$

Naj bo E glavni idempotent, ki pripada lastni vrednosti θ in naj bo $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ pripadajoče zaporedje lastnih vrednosti. Ker je $\alpha = b-1$, v tem primeru celo natančno poznamo zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Corollary 8.4.2] je namreč

$$\theta_i^* = \frac{(-r)^{2d-i} - 1}{r+1} \quad \text{za} \quad i \in \{0, \ldots, d\}.$$

Kdaj ima graf Γ presečno število a_1 enako 0? Po enačbi (5.7) natanko tedaj, ko je $r = 2$. Do konca tega podrazdelka torej privzemimo, da je Γ graf hermitskih preslikav z $r = 2$. Ker je $a_2 = 3 \neq 0$, za graf Γ po posledici 5.1.9 velja $a_i \neq 0$ za $i \in \{2, \ldots, d\}$. Naj bosta $x, y \in V\Gamma$ sosednji vozlišči grafa Γ. Parametri particije vozlišč grafa Γ glede na razdaljo od vozlišč x in y so podani z naslednjim izrekom, ki ga dobimo neposredno iz posledice 5.1.11 in izreka 3.2.5.

Izrek 5.1.12 *Naj bo Γ graf hermitskih preslikav z $r = 2$ in premerom $d \geq 3$. Naj bosta $x, y \in V\Gamma$ sosednji vozlišči grafa Γ. Označimo $D_j^i = D_j^i(x,y)$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Potem veljata naslednji trditvi.*

(i) *Vsako vozlišče $z \in D_{i-1}^i$ (oz. D_i^{i-1}) $(1 \leq i \leq d)$ nima sosedov v množici D_{i-1}^{i-1} in ima*
  - *(a) natanko* $2^{i-2}(2^{i-1} - (-1)^{i-1})/3$ *sosedov v D_{i-2}^{i-1} (oziroma D_{i-1}^{i-2}),*
  - *(b) natanko* $2^{i-2}(2^{i-1} + (-1)^{i-1})$ *sosedov v D_i^{i-1} (oziroma D_{i-1}^i),*
  - *(c) natanko* $(2^{2i-3} - (-2)^{i-2} - 1)/3$ *sosedov v D_{i-1}^i (oziroma D_i^{i-1}),*
  - *(d) natanko* $(2^{2d} - 2^{2i})/3$ *sosedov v D_i^{i+1} (oziroma D_{i+1}^i),*
  - *(e) natanko* $2^{i-2}(2^{i-1} - (-1)^{i-1})$ *sosedov v D_i^i.*

(ii) *Vsako vozlišče* $z \in D_i^i$ $(2 \le i \le d)$ *nima sosedov v* $D_i^{i+1} \cup D_{i+1}^i$ *in ima*
  (a) natanko $(-1)^i 2^{i-1}((-2)^{i-2} - 1)/3$ *sosedov v* D_{i-1}^{i-1},
  (b) natanko $(2^{2d} - 2^{2i})/3$ *sosedov v* D_{i+1}^{i+1},
  (c) natanko 2^{2i-3} *sosedov v* D_{i-1}^i,
  (d) natanko 2^{2i-3} *sosedov v* D_i^{i-1},
  (e) natanko $(2^{2i-3} - (-2)^{i-1} - 1)/3$ *sosedov v* D_i^i.

5.1.3 Wittov graf M_{23}

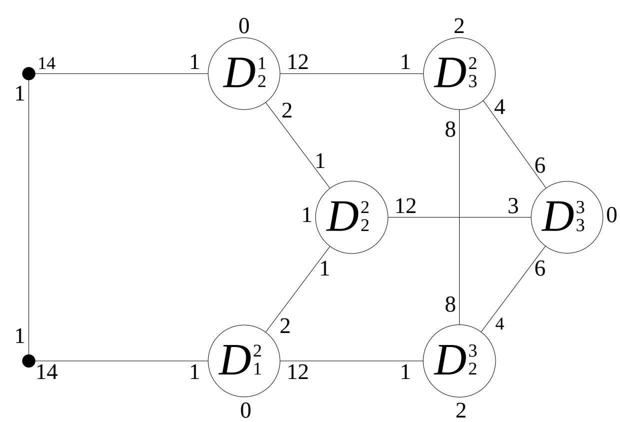
Naj bo $(\Sigma, \mathcal{B})$ Steinerjev sistem s parametri $S(5,8,24)$. *Wittov graf* M_{24} ima za vozlišča bloke tega Steinerjevega sistema, dve vozlišči pa sta sosednji natanko tedaj, kadar sta ustrezna bloka disjunktna. Wittov graf M_{24} je razdaljno-regularen graf premera 3 s 759 vozlišči in s presečno tabelo

$$\{30, 28, 24; 1, 3, 15\},$$

glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 11.4.1]. Izberimo si vozlišče $\sigma \in \Sigma$. Naj bo $\mathcal{B}'$ množica tistih blokov iz $\mathcal{B}$, ki ne vsebujejo σ. *Wittov graf* M_{23} je graf, ki ga v Wittovem grafu M_{24} inducira $\mathcal{B}'$. Je razdaljno-regularen graf s 506 vozlišči, premerom 3 in presečno tabelo

$$\{15, 14, 12; 1, 1, 9\}.$$

Graf M_{23} ima klasične parametre $(3, -2, -2, 5)$ in je Q polinomski glede na glavni idempotent, ki pripada lastni vrednosti -8. Zaporedje dualnih lastnih vrednosti, ki pripada lastni vrednosti -8, je enako $1, -8/15, 7/30, -3/20$. Po izreku 5.1.6 je Wittov graf M_{23} 1-homogen. Parametre particije vozlišč grafa M_{23} glede na razdaljo od para sosednjih vozlišč dobimo neposredno iz posledice 5.1.11 ter izreka 3.2.5. Grafično jih podamo na sliki 5.2.



Slika 5.2: Razdaljna particija vozlišč Wittovega grafa M_{23} glede na par sosednjih vozlišč.

5.2 Razdaljno-regularni grafi negativnega tipa

Kot smo omenili že v podrazdelku 5.1.1, ima razdaljno-regularen graf Γ klasične parametre (d, b, α, β), če je njegov premer enak d, presečna števila pa zadoščajo

$$c_i = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \Big(1 + \alpha \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix}\Big) \quad (1 \le i \le d),$$

$$b_i = \Big(\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\Big)\Big(\beta - \alpha \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\Big) \quad (0 \le i \le d-1),$$

kjer je

$$\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} := 1 + b + b^2 + \cdots + b^{j-1}.$$

Parametru b razdaljno-regularnega grafa Γ s klasičnimi parametri (d, b, α, β) pravimo tudi *baza* grafa Γ. Omenili smo, da je baza b celo število, ki ni enako -1 ali 0. Za graf Γ pravimo da je *negativnega tipa*, če je $b < -1$. V tem razdelku se bomo ukvarjali z vprašanjem, kdaj je razdaljno-regularen graf negativnega tipa 1-homogen. Izkaže se, da rezultate prejšnjega razdelka lahko v nekem smislu posplošimo na grafe negativnega tipa. V primeru, ko tak graf ni 1-homogen, bomo namreč opisali particijo njegovih vozlišč, ki je nekoliko finejša od razdaljne particije glede na par dveh sosednjih vozlišč, ter pokazali, da je ekvitabilna. Ker vemo, da so Q-polinomski razdaljno-regularni grafi brez trikotnikov 1-homogeni, se bomo v tem poglavju omejili na tiste razdaljno-regularne grafe negativnega tipa, ki imajo presečno število $a_1 \neq 0$. Potrebovali bomo tudi naslednjo lemo.

Lema 5.2.1 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf s premerom $d \ge 3$ in s klasičnimi parametri (d, b, α, β). Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) *Če je $b < -1$, potem je $\alpha \neq 0$.*

(ii) *Za vsako naravno število i $(1 \le i \le d)$ je*

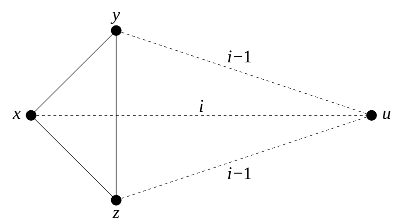
$$a_i - a_1 c_i = -\alpha(1 + b + a_1) \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dokaz. (i) Če je $b < -1$ in $\alpha = 0$, potem iz zgornjih formul za presečna števila grafa Γ dobimo $c_2 = 1 + b < 0$, protislovje!
(ii) Trditev sledi neposredno iz zgornjih formul za presečna števila grafa Γ. ∎

5.2.1 Zmaji in paralelogrami

Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \ge 3$. V tem podrazdelku bomo opisali strukture v grafu Γ, ki jih bomo poimenovali *zmaji* in *paralelogrami*. Navedli bomo tudi nekaj rezultatov v zvezi z njimi.

Izberimo naravno število i $(2 \leq i \leq d)$. *Zmaj dolžine* i (ali i-*zmaj*) je četverica vozlišč $xyzu$ grafa Γ, za katere velja, da so vozlišča x, y, z paroma sosednja, vozlišče u pa je na razdalji i od x ter $i-1$ od y in z. O upravičenosti imena "zmaj" za četverico vozlišč $xyzu$ se lahko prepričamo na sliki 5.3.



Slika 5.3: Zmaj dolžine i.

Za graf Γ pravimo, da je *brez zmajev*, če ne vsebuje nobenih zmajev. Naslednja rezultata nam podata povezavo med grafi brez zmajev in grafi negativnega tipa.

Izrek 5.2.2 (Terwilliger [46, Theorem 2.12]) *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf negativnega tipa. Potem je Γ brez zmajev.* ■

Izrek 5.2.3 (Weng [49, Theorem 2.6]) *Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$ in s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Potem sta ekvivalentni naslednji trditvi:*

(i) *Graf Γ ima klasične parametre in je bodisi negativnega tipa bodisi je izomorfen Hammingovemu grafu ali dualnemu polarnemu grafu.*

(ii) *Graf Γ je brez zmajev.* ■

Opomba: za definicijo Hammingovih grafov in dualnih polarnih grafov glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.2 in Section 9.4].

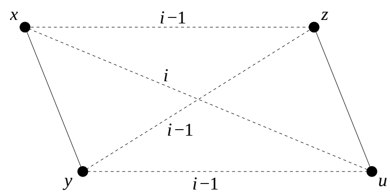
Vpeljimo sedaj še pojem paralelograma v grafu Γ. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$ in i $(2 \leq i \leq d)$ naravno število. *Paralelogram dolžine* i (ali i-*paralelogram*) v grafu Γ je četverica vozlišč $xyzu$ grafa Γ, za katere velja $\partial(x, y) = \partial(z, u) = 1$, $\partial(x, u) = i$ in $\partial(x, z) = \partial(y, z) = \partial(y, u) = i - 1$.

Za graf Γ pravimo da je *brez paralelogramov*, če ne vsebuje nobenih paralelogramov. Naslednji izrek povezuje grafe brez paralelogramov in grafe brez zmajev.

Izrek 5.2.4 *Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$ in s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Potem sta ekvivalentni naslednji trditvi.*

(i) *Graf Γ je brez zmajev.*

(ii) *Graf Γ je brez paralelogramov.*



Slika 5.4: Paralelogram dolžine i.

DOKAZ. (i) → (ii) Po izreku 5.2.3 ima graf Γ klasične parametre (d, b, α, β). Izberimo si naravno število i $(2 \leq i \leq d)$ in $x, y, u \in V\Gamma$, za katera velja $\partial(x, y) = 1$, $\partial(x, u) = i$ in $\partial(y, u) = i - 1$. Definirajmo $f_i = f_i(x, y, u)$ in $e_i = e_i(x, y, u)$ z

$$f_i := |\{z \,|\, z \in V\Gamma, \text{ četverica } xyzu \text{ je } i\text{-paralelogram } \}|$$

in

$$e_i := |\{z \,|\, z \in V\Gamma, \text{ četverica } xyzu \text{ je } i\text{-zmaj } \}|.$$

Po Wengovem rezultatu [50, Lemma 7.3], je

$$f_i = b^{i-2} e_i.$$

Ker je graf Γ po predpostavki brez zmajev, je $e_i = 0$. Zato je tudi $f_i = 0$ in graf Γ je tudi brez paralelogramov.
$(ii) \to (i)$ (Weng [50, Lemma 6.12]). Recimo, da graf Γ vsebuje zmaja dolžine i. Izmed vseh zmajev izberimo zmaja $xyzu$, ki ima najmanjšo dolžino j. Ker je zmaj dolžine 2 tudi paralelogram dolžine 2, je $j \geq 3$. Naj bo w vozlišče, ki je sosednje vozlišču u in je od vozlišča z oddaljeno $j - 2$. Potem je

$$\partial(w, y) \leq \partial(w, z) + \partial(z, y) = j - 1$$

in

$$\partial(w, y) \geq \partial(y, u) - \partial(w, u) = j - 2.$$

Torej $\partial(w, y) \in \{j - 2, j - 1\}$. Če je $\partial(y, w) = j - 2$, potem je četverica $xyzw$ zmaj dolžine $j - 1$, kar je v protislovju z minimalnostjo števila j. Če pa je $\partial(y, w) = j - 1$, potem je četverica $uwyx$ paralelogram dolžine j, kar pa je spet protislovje. Lema je tako dokazana. ■

Naj bo sedaj Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, brez zmajev, s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Naj bosta x in y sosednji vozlišči grafa Γ. Označimo $D^i_j = D^i_j(x, y)$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Seveda mora biti podgraf grafa Γ, ki je induciran z vozlišči množice D^1_1, poln graf, sicer bi v grafu Γ obstajal zmaj dolžine 2. Izberimo si sedaj naravno število $i \in \{1, \ldots, d\}$ in za vozlišče $z \in D^i_i$ definirajmo $\sigma(z) = |\Gamma_{i-1}(z) \cap D^1_1|$. Če je $i = 1$, potem je $\sigma(z) = 1$ za vsako vozlišče $z \in D^1_1$. Ni pa se težko prepričati, da je tudi v primeru, ko je $i \geq 2$, $\sigma(z) \in \{0, 1\}$. V nasprotnem primeru bi graf Γ imel zmaja dolžine i. To nam osmisli naslednjo definicijo.

Definicija 5.2.5 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, brez zmajev, s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Izberimo si naravno število $i \in \{1, \ldots, d\}$ in sosednji vozlišči x in y grafa Γ. Za $j \in \{0, 1\}$ definirajmo $D_i^i(j) = \{z \in D_i^i(x, y) \mid \sigma(z) = j\}$.*

Naslednja preprosta lema je neposredna posledica definicije 5.2.5.

Lema 5.2.6 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, brez zmajev, s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Izberimo si naravno število $i \in \{1, \ldots, d\}$ in sosednji vozlišči x in y grafa Γ. Potem velja:*

(i) $D_1^1(1) = D_1^1(x, y)$, $D_1^1(0) = \emptyset$,

(ii) $D_i^i(x, y)$ *je disjunktna unija množic* $D_i^i(1)$ *in* $D_i^i(0)$. ■

Lema 5.2.7 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, brez zmajev, s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Izberimo si naravno število $i \in \{2, \ldots, d\}$ in sosednji vozlišči x in y grafa Γ. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) $\partial(u, z) = 1$ *za poljubni različni vozlišči* $u, z \in D_1^1(x, y)$,

(ii) $\partial(u, z) = i$ *za vsak* $u \in D_1^1$ *in* $z \in D_i^i(0)$.

DOKAZ. (i) Če vozlišči u in z nista sosednji, potem je četverica $xyzu$ zmaj dolžine 2. (ii) Po definiciji množice $D_i^i(0)$ in zaradi trikotniške neenakosti je $\partial(u, z) \in \{i, i+1\}$. Če je $i = d$, potem je očitno $\partial(u, z) = i$. Če pa je $i < d$ in je $\partial(u, z) = i + 1$, potem je četverica $uxyz$ zmaj dolžine $i + 1$, kar je protislovje. Lema je tako dokazana. ■

5.2.2 Particija

Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, brez zmajev, s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Če graf Γ ni negativnega tipa, potem je po izreku 5.2.3 bodisi Hammingov graf bodisi dualni polarni graf. Tako Hammingovi grafi kot dualni polarni grafi so regularni skoraj $2d$-goni (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Table 6.6]), zato so po izreku 3.3.2 1-homogeni. V naslednjih dveh podrazdelkih bomo zato privzeli naslednjo situacijo.

Graf Γ naj bo Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$, brez zmajev, s presečnim številom $a_1 \neq 0$, ki ni skoraj $2d$-gon. Po izreku 5.2.3 ima graf Γ klasične parametre (d, b, α, β) z $b < -1$. Izberimo si sosednji vozlišči $x, y \in V\Gamma$ in definirajmo $D_j^i = D_j^i(x, y)$ $(0 \leq i, j \leq d)$. Množice $D_i^i(1)$ in $D_i^i(0)$ $(1 \leq i \leq d)$ definirajmo kot v definiciji 5.2.5. Poskusili bomo dokazati naslednje tri trditve:

(i) Množice $D_i^{i-1}, D_{i-1}^i, D_i^i(1)$ za $1 \leq i \leq d$ in množice $D_i^i(0)$ za $2 \leq i \leq d$ so neprazne.

(ii) Particija vozlišč grafa Γ na množice $D_i^{i-1}, D_{i-1}^i, D_i^i(1)$ za $1 \leq i \leq d$ in $D_i^i(0)$ za $2 \leq i \leq d$ je ekvitabilna.

(iii) Parametri te particije so neodvisni od izbire vozlišč x in y.

Prvi del zgornje točke (i), namreč, da so množice D_i^{i-1}, D_{i-1}^i za $1 \le i \le d$ neprazne, sledi iz leme 3.2.3(i). Dokazovanje zato začnimo z naslednjo lemo.

Lema 5.2.8 *Veljajo naslednje trditve:*

(i) *Med množicama $D_i^{i-1} \cup D_{i-1}^i$ in $D_{i-1}^{i-1}(0) \cup D_{i-1}^{i-1}(1)$ $(2 \le i \le d)$ ni povezav.*

(ii) *Med množicama $D_i^i(1)$ in $D_{i+1}^{i+1}(0)$ $(1 \le i \le d-1)$ ni povezav.*

(iii) *Med množicama $D_i^i(1)$ in $D_{i-1}^{i-1}(0)$ $(3 \le i \le d)$ ni povezav.*

DOKAZ. (i) Če sta vozlišči $v \in D_i^{i-1}$ (oziroma $v \in D_{i-1}^i$) in $w \in D_{i-1}^{i-1}(0) \cup D_{i-1}^{i-1}(1)$ sosednji, potem je četverica $yxwv$ (oziroma $xywv$) paralelogram dolžine i. To pa je v protislovju z izrekom 5.2.4.
(ii) Med množicama $D_i^i(1)$ in $D_{i+1}^{i+1}(0)$ $(1 \le i \le d-1)$ ni povezav po definiciji množice $D_{i+1}^{i+1}(0)$.
(iii) Recimo, da je vozlišče $v \in D_i^i(1)$ sosedenje vozlišču $w \in D_{i-1}^{i-1}(0)$. Naj bo z enolično določeno vozlišče iz D_1^1, za katerega velja $\partial(z,v) = i-1$. Po lemi 5.2.7(ii) je $\partial(z,w) = i-1$. Toda sedaj je četverica $xzwv$ paralelogram dolžine i, kar je v protislovju z izrekom 5.2.4. ■

Z upoštevanjem, da je $\Gamma_i(x) = D_{i-1}^i \cup D_i^i(1) \cup D_i^i(0) \cup D_{i+1}^i$ in $\Gamma_i(y) = D_i^{i-1} \cup D_i^i(1) \cup D_i^i(0) \cup D_i^{i+1}$ $(1 \le i \le d)$ nam sedaj ne bo težko dokazati naslednje leme.

Lema 5.2.9 *Za vsako naravno število i $(2 \le i \le d)$ veljajo naslednje trditve:*

(i) *Vsako vozlišče $v \in D_{i-1}^i$ (oz. D_i^{i-1}) nima sosedov v $D_{i-1}^{i-1}(0) \cup D_{i-1}^{i-1}(1)$ in ima*

(a) natanko	c_{i-1}	*sosedov v D_{i-2}^{i-1} (oz. D_{i-1}^{i-2}),*
(b) natanko	$c_i - c_{i-1}$	*sosedov v D_i^{i-1} (oz. D_{i-1}^i),*
(c) natanko	a_{i-1}	*sosedov v D_{i-1}^i (oz. D_i^{i-1}),*
(d) natanko	b_i	*sosedov v D_i^{i+1} (oz. D_{i+1}^i),*
(e) natanko	$a_i - a_{i-1} - \lvert\Gamma(v) \cap D_i^i(1)\rvert$	*sosedov v $D_i^i(0)$.*

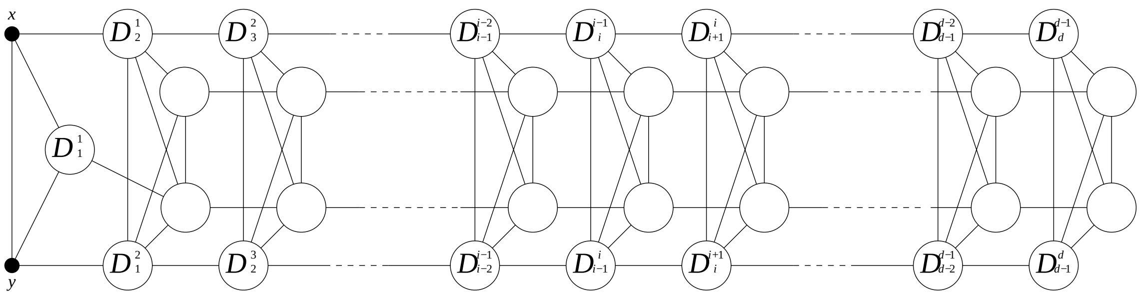
(ii) *Vsako vozlišče $v \in D_i^i(0)$ nima sosedov v $D_{i-1}^{i-1}(1) \cup D_{i+1}^{i+1}(1) \cup D_{i+1}^i \cup D_i^{i+1}$ in ima*

(a) natanko	$c_i - \lvert\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)\rvert$	*sosedov v D_{i-1}^i,*
(b) natanko	$c_i - \lvert\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)\rvert$	*sosedov v D_i^{i-1},*
(c) natanko	b_i	*sosedov v $D_{i+1}^{i+1}(0)$,*
(d) natanko	$a_i + \lvert\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)\rvert - c_i - \lvert\Gamma(v) \cap D_i^i(1)\rvert$	*sosedov v $D_i^i(0)$.*

(iii) *Vsako vozlišče* $v \in D_i^i(1)$ *nima sosedov v* $D_{i-1}^{i-1}(0) \cup D_{i+1}^{i+1}(0) \cup D_{i+1}^i \cup D_i^{i+1}$ *in ima*

(a) natanko	$c_i - \lvert\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(1)\rvert$	*sosedov v* D_{i-1}^i,
(b) natanko	$c_i - \lvert\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(1)\rvert$	*sosedov v* D_i^{i-1},
(c) natanko	b_i	*sosedov v* $D_{i+1}^{i+1}(1)$,
(d) natanko	$a_i + \lvert\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(1)\rvert -$ $c_i - \lvert\Gamma(v) \cap D_i^i(1)\rvert$	*sosedov v* $D_i^i(0)$. ■

Particijo vozlišč grafa Γ grafično predstavimo na sliki 5.5.



Slika 5.5: Razdaljna particija vozlišč grafa Γ glede na par sosednjih vozlišč x, y. Krogi v sredini slike predstavljajo množice $D_i^i(0)$ $(2 \le i \le d)$ (zgornja vrsta) in množice $D_i^i(1)$ $(2 \le i \le d)$ (spodnja vrsta). S slike se ni težko prepričati, da velja $\Gamma_i(x) = D_{i-1}^i \cup D_i^i(1) \cup D_i^i(0) \cup D_{i+1}^i$ in $\Gamma_i(y) = D_i^{i-1} \cup D_i^i(1) \cup D_i^i(0) \cup D_i^{i+1}$ $(1 \le i \le d)$.

5.2.3 Ekvitabilnost particije

Če želimo pokazati, da je particija vozlišč grafa Γ na množice $D_i^{i-1}, D_{i-1}^i, D_i^i(1)$ za $1 \le i \le d$ in $D_i^i(0)$ za $2 \le i \le d$ ekvitabilna, moramo po lemi 5.2.9 pokazati, da števila $|\Gamma(v_1) \cap D_i^i(1)|$, $|\Gamma(v_2) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)|$, $|\Gamma(v_2) \cap D_i^i(1)|$, $|\Gamma(v_3) \cap D_{i-1}^{i-1}(1)|$ in $|\Gamma(v_3) \cap D_i^i(1)|$ niso odvisna od izbire sosednjih vozlišč x in y ter vozlišč $v_1 \in D_i^{i-1} \cup D_{i-1}^i$, $v_2 \in D_i^i(0)$ in $v_3 \in D_i^i(1)$. V naslednjih treh lemah bomo to pokazali.

Lema 5.2.10 *Za vsako naravno število* i $(2 \le i \le d)$ *in za vsako vozlišče* $v \in D_i^{i-1} \cup D_{i-1}^i$ *je*

$$|\Gamma(v) \cap D_i^i(1)| = a_1(c_i - c_{i-1}).$$

DOKAZ. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $v \in D_i^{i-1}$. Dokaz v primeru $v \in D_{i-1}^i$ poteka povsem analogno. Vozlišče v je na razdalji i od vsakega vozlišča v D_1^1, zato poteka od v do D_1^1 natanko $a_1 c_i c_{i-1} \cdots c_1$ poti dolžine i. Ker ima v natanko c_{i-1} sosedov v D_{i-1}^{i-2}, natanko $c_{i-1} a_1 c_{i-1} c_{i-2} \cdots c_1$ teh poti poteka skozi množico D_{i-1}^{i-2}. Ostalih $a_1(c_i - c_{i-1}) c_{i-1} c_{i-2} \cdots c_1$ poti mora tako potekati skozi množico $D_i^i(1)$. Naj bo $w \in D_i^i(1)$. Ker obstaja natanko določeno vozlišče $z \in D_1^1$, tako da je $\partial(z, w) = i - 1$, obstaja natanko $c_{i-1} c_{i-2} \cdots c_1$ poti dolžine $i - 1$ med w in D_1^1. Torej mora v imeti natanko $a_1(c_i - c_{i-1})$ sosedov v $D_i^i(1)$. ■

Lema 5.2.11 *Za vsako naravno število i $(2 \leq i \leq d)$ in za vsak $v \in D_i^i(0)$ veljata naslednji trditvi:*

(i)
$$|\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)| = c_i \frac{b^{i-2}-1}{b^i-1},$$

(ii)
$$|\Gamma(v) \cap D_i^i(1)| = a_1 c_i \frac{b^i - b^{i-2}}{b^i-1}.$$

DOKAZ. (i) Označimo $\tau = |\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)|$ in $\eta = |\Gamma(v) \cap D_i^{i-1}|$. Ker ima vozlišče v v $\Gamma_{i-1}(x)$ natanko c_i sosedov in ker je $\Gamma(v) \cap \Gamma_{i-1}(x) \subseteq D_{i-1}^{i-1}(0) \cup D_i^{i-1}$, je $\tau + \eta = c_i$. Ker je graf Γ brez zmajev in ker ni skoraj poligon, ima po izreku 5.2.3 klasične parametre (d, b, α, β), $b < -1$. Po lemi 5.1.10 je Γ Q-polinomski glede na glavni idempotent, ki pripada lastni vrednosti $\theta = \left[{d-1 \atop 1}\right](\beta - \alpha) - 1$, pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti pa je enako
$$\theta_i^* = \gamma \begin{bmatrix} d-i \\ 1 \end{bmatrix} + \delta \quad (0 \leq i \leq d) \tag{5.8}$$
za neki realni števili γ, δ. Po izreku 2.4.2 zato velja
$$\sum_{\substack{\partial(x,z)=i-1 \\ \partial(v,z)=1}} Ez - \sum_{\substack{\partial(x,z)=1 \\ \partial(v,z)=i-1}} Ez = c_i \frac{\theta_{i-1}^* - \theta_1^*}{\theta_0^* - \theta_i^*}(Ex - Ev). \tag{5.9}$$

Opazimo, da je $\{z \in V\Gamma | \partial(x,z) = 1,\ \partial(v,z) = i-1\} \subseteq D_2^1$, zato so vsa vozlišča iz te množice na razdalji 2 od vozlišča y. Če enačbo (5.9) skalarno pomnožimo $(|V\Gamma|/m)Ey$, kjer je m večkratnost lastne vrednosti θ, in uporabimo lemo 2.3.5(i), dobimo
$$\tau\theta_{i-1}^* + \eta\theta_i^* - c_i\theta_2^* = c_i \frac{\theta_{i-1}^* - \theta_1^*}{\theta_0^* - \theta_i^*}(\theta_1^* - \theta_i^*).$$

Če upoštevamo še $\eta = c_i - \tau$ nam zgornja enačba da
$$\tau = c_i \frac{(\theta_{i-1}^* - \theta_1^*)(\theta_1^* - \theta_i^*) + (\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_2^* - \theta_i^*)}{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_{i-1}^* - \theta_i^*)}.$$

Z upoštevanjem enačbe (5.8) pa dobimo še
$$\tau = c_i \frac{b^{i-2}-1}{b^i-1}.$$

(ii) Po lemi 5.2.7(ii) je vozlišče v na razdalji i od vsakega vozlišča iz množice D_1^1. Zato je v grafu Γ natanko $a_1 c_i c_{i-1} \cdots c_1$ poti dolžine i od vozlišča v do množice D_1^1. Po že dokazani točki (i) te leme natanko $a_1 \frac{b^{i-2}-1}{b^i-1} c_i c_{i-1} \cdots c_1$ izmed teh poti poteka skozi $D_{i-1}^{i-1}(0)$. Ostalih $a_1 \frac{b^i - b^{i-2}}{b^i-1} c_i \cdots c_1$ poti mora potekati skozi $D_i^i(1)$. Naj bo $w \in D_i^i(1)$.

Ker obstaja enolično določeno vozlišče $z \in D_1^1$, za katerega velja $\partial(z,w) = i-1$, od vozlišča w do množice D_1^1 poteka natanko $c_{i-1}c_{i-2}\cdots c_1$ poti dolžine $i-1$. Torej mora imeti vozlišče v v množici $D_i^i(1)$ natanko $a_1 c_i \frac{b^i - b^{i-2}}{b^i - 1}$ sosedov. Lema je tako dokazana. ■

Lema 5.2.12 *Za vsako naravno število i $(1 \le i \le d)$ in za vsak $v \in D_i^i(1)$ veljata naslednji trditvi:*

(i)
$$|\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(1)| = c_{i-1},$$

(ii)
$$|\Gamma(v) \cap D_i^i(1)| = (a_1 - 1)(c_i - c_{i-1}) + a_{i-1}.$$

DOKAZ. (i) Ker je $D_0^0 = \emptyset$, trditev očitno velja za $i = 1$, zato privzemimo $i \ge 2$. Naj bo z enolično določeno vozlišče v množici D_1^1, za katerega velja, da je $\partial(z,v) = i-1$. V grafu Γ obstaja med z in v natanko $c_{i-1}c_{i-2}\cdots c_1$ poti dolžine $i-1$ in vse te poti potekajo skozi $D_{i-1}^{i-1}(1)$. Ker je vsak sosed vozlišča v v $D_{i-1}^{i-1}(1)$ povezan z vozliščem z preko $c_{i-2}\cdots c_1$ poti dolžine $i-2$, mora imeti v natanko c_{i-1} sosedov v $D_{i-1}^{i-1}(1)$.

(ii) Če je $i = 1$ potem trditev drži po lemi 5.2.7(i). Predpostavimo sedaj, da je $i \ge 2$. Spet naj bo z enolično določeno vozlišče v množici D_1^1, za katerega velja, da je $\partial(z,v) = i-1$. Če je z' še eno vozlišče iz D_1^1, potem je $\partial(z',v) = i$. Zato je med vozliščem v in množico D_1^1 natanko $(a_1-1)c_ic_{i-1}\cdots c_1 + (a_{i-1}+\cdots+a_1)c_{i-1}\cdots c_1$ poti dolžine i. Ker ima v natanko c_{i-1} sosedov v $D_{i-1}^{i-1}(1)$, je natanko $c_{i-1}((a_1 - 1)c_{i-1}\cdots c_1 + (a_{i-2}+\cdots+a_1)c_{i-2}\cdots c_1)$ teh poti, za katere je vozlišče v edino vozlišče iz $D_i^i(1)$. Po drugi strani pa je natanko $c_{i-1}c_{i-2}\cdots c_1$ poti dolžine $i-1$, ki povezujejo poljubno vozlišče iz $D_i^i(1)$ z množico D_1^1. Torej mora imeti vozlišče v v množici $D_i^i(1)$ natanko $(a_1-1)(c_i - c_{i-1}) + a_{i-1}$ sosedov. Lema je tako dokazana. ■

Pokazali smo torej, da je particija vozlišč grafa Γ na množice D_i^{i-1}, D_{i-1}^i za $1 \le i \le d$ ter na neprazne množice $D_i^i(1)$ za $1 \le i \le d$ in $D_i^i(0)$ za $2 \le i \le d$ ekvitabilna, ter da parametri te particije niso odvisni od izbire sosednjih vozlišč x in y. Pokažimo še, da so množice $D_i^i(1)$ $(1 \le i \le d)$ in $D_i^i(0)$ $(2 \le i \le d)$ neprazne.

Lema 5.2.13 *Za vsako naravno število i $(1 \le i \le d)$ velja*

$$|D_i^i(1)| = a_1 \frac{b_1 \cdots b_{i-1}}{c_1 \cdots c_{i-1}} \quad in \quad |D_i^i(0)| = \frac{b_1 \cdots b_{i-1}}{c_1 \cdots c_i}(a_i - a_1 c_i).$$

DOKAZ. Dokažimo najprej prvo enakost. Za $i = 1$ trditev očitno drži, saj je $|D_1^1(1)| = |D_1^1| = a_1$. Zato privzemimo $i \ge 2$. Po lemi 5.2.9(iii) ima vsako vozlišče iz množice $D_{i-1}^{i-1}(1)$ natanko b_{i-1} sosedov v množici $D_i^i(1)$. Po lemi 5.2.12(i) pa ima vsako vozlišče iz $D_i^i(1)$ natanko c_{i-1} sosedov v $D_{i-1}^{i-1}(1)$. Če preštejemo povezave med množicama $D_{i-1}^{i-1}(1)$ in $D_i^i(1)$ na dva različna načina, dobimo

$$|D_{i-1}^{i-1}(1)|\, b_{i-1} = |D_i^i(1)|\, c_{i-1}.$$

S preprostim indukcijskim računom dobimo
$$|D_i^i(1)| = |D_1^1(1)|\frac{b_1\cdots b_{i-1}}{c_1\cdots c_{i-1}}.$$
Ker pa je $|D_1^1(1)| = a_1$, je
$$|D_i^i(1)| = a_1\frac{b_1\cdots b_{i-1}}{c_1\cdots c_{i-1}}.$$
Dokažimo sedaj še drugo enakost. Ker je D_i^i disjunktna unija množic $D_i^i(1)$ in $D_i^i(0)$, je $|D_i^i(0)| = |D_i^i| - |D_i^i(1)|$. Ker pa moč množice D_i^i poznamo (glej lemo 3.2.3(ii)), z uporabo pravkar dokazane točke (i) dobimo željeni rezultat. ∎

Sedaj pa nam ne bo težko dokazati naslednje posledice.

Posledica 5.2.14 *Veljata naslednji trditvi:*

(i) *Za vsako naravno število i $(1 \le i \le d)$ je $D_i^i(1) \neq \emptyset$.*

(ii) *Za vsako naravno število i $(2 \le i \le d)$ je $D_i^i(0) \neq \emptyset$.*

DOKAZ. (i) Sledi neposredno iz leme 5.2.13(i).
(ii) Najprej pokažimo, da število $a_i - a_1c_i$ $(2 \le i \le d)$ ni enako 0. Po lemi 5.2.1 je $\alpha \neq 0$ in
$$a_i - a_1c_i = -\alpha(1+b+a_1)\begin{bmatrix} i \\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i-1 \\ 1\end{bmatrix}.$$
Torej, če je $a_i = a_1c_i$, potem je $b = -a_1 - 1$. Ker je graf Γ brez zmajev in ker ni skoraj poligon, je po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 6.4.1] $a_j \neq a_1c_j$ za neko naravno število j $(2 \le j \le d)$. Torej je $b \neq -a_1 - 1$ in zato $a_i - a_1c_i \neq 0$ za vsak i $(2 \le i \le d)$. Dokaz leme sedaj sledi iz leme 5.2.13(ii). ∎

Če torej povzamemo, smo dokazali nasledni izrek.

Izrek 5.2.15 *Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \ge 3$, brez zmajev, s presečnim številom $a_1 \neq 0$, ki ni skoraj $2d$-gon. Naj bosta x in y sosednji vozlišči grafa Γ. Particija vozlišč grafa Γ na množice $D_i^{i-1}, D_{i-1}^i, D_i^i(1)$ $(1 \le i \le d)$ in množice $D_i^i(0)$ $(2 \le i \le d)$ je ekvitabilna, njeni parametri pa so neodvisni od izbire vozlišč x in y.* ∎

Posledica 5.2.16 *Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf premera $d \ge 3$, brez zmajev, s presečnim številom $a_1 \neq 0$. Potem je graf Γ 1-homogen natanko takrat, ko je skoraj poligon.*

DOKAZ. Najprej pokažimo, da graf Γ ne more biti $(2d+1)$-gon. Namreč, po izreku 5.2.3 je Γ bodisi graf negativnega tipa bodisi je izomorfen Hammingovemu grafu ali dualnemu polarnemu grafu. Ni se težko prepričati (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 6.4.1, Theorem 9.2.1, Theorem 9.4.3]), da so Hammingovi grafi in dualni polarni grafi $2d$-goni. Če pa je Γ graf negativnega tipa, potem je po posledici 5.2.14(ii) $D_i^i(0) \neq \emptyset$ za vsako naravno število i $(2 \leq i \leq d)$. Torej je zato $a_2 \neq a_1 c_2$ in po izreku Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 6.4.1] graf Γ ni skoraj poligon. Sedaj pa dokažimo ekvivalenco zgornjih trditev. Če je Γ skoraj poligon, potem je po pravkar povedanem skoraj $2d$-gon in je zato 1-homogen po Nomura [38, Theorem 1]. Če pa Γ ni skoraj poligon, potem je po posledici 5.2.14(ii) množica $D_2^2(0)$ neprazna in zato Γ ni 1-homogen, saj vozlišča iz množice D_2^2 nimajo enakega števila sosedov v množici D_1^1. ∎

Podrazdelek končajmo z naslednjo opombo. Naj bo Γ graf iz izreka 5.2.15. Potem ima po izreku 5.2.3 klasične parametre (d, b, α, β) z $b < -1$. Po Wengovem rezultatu [48, Theorem 10.3] drži vsaj ena od naslednjih štirih možnosti:

(i) $d = 3$,

(ii) $c_2 = 1$,

(iii) Γ je graf hermitskih form (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.5 C]),

(iv) $\alpha = (b-1)/2$, $\beta = -(1+b^d)/2$ in $-b$ je potenca lihega praštevila.

Ker morajo biti moči množic particije in parametri particije podane v izreku 5.2.15 nenegativna naravna števila, bi nam lahko tako dobljeni pogoji pomagali klasificirati grafe iz točk (i) in (ii).

5.2.4 Grafi hermitskih preslikav

Kot primer družine razdaljno-regularnih grafov negativnega tipa, ki niso skoraj poligoni, si poglejmo grafe hermitskih preslikav. Predstavili smo jih že v podrazdelku 5.1.2. Graf hermitskih preslikav nad vektorskim prostorom $\mathbb{F}_q^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, končen obseg $\mathbb{F}_q$ pa je moči $q = r^2$, kjer je r potenca praštevila, ima premer $d = n$ in presečna števila

$$b_i = \frac{q^n - q^i}{r+1}, \quad c_i = \frac{r^{i-1}(r^i - (-1)^i)}{r+1},$$
$$a_i = \frac{r^{2i} - r^{2i-1} - (-r)^{i-1} - 1}{r+1} \quad (0 \leq i \leq d).$$

Grafi hermitskih preslikav so grafi negativnega tipa, saj imajo klasične parametre $(d, -r, \, -r-1, -(1+(-r)^d))$. Ali je lahko graf hermitskih preslikav skoraj poligon? Izračunajmo naslednja presečna števila:

$$a_1 = r - 2, \;\; a_2 = (r-1)(r^2 - r + 1), \;\; c_2 = r(r-1).$$

Če bi bil graf hermitskih preslikav skoraj poligon, potem mora veljati $a_2 = a_1 c_2$ (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 6.4.1]). To pa je mogoče le za $r \in \{-1, 1\}$. Torej grafi hermitskih preslikav niso skoraj poligoni. Če je $r = 2$, potem je graf hermitskih preslikav 1-homogen in te grafe smo natančneje predstavili že v podrazdelku 5.1.2. Omejimo se torej na grafe hermitskih preslikav z $r > 2$, ki po posledici 5.2.16 niso 1-homogeni. Zato pa premorejo ekvitabilno particijo vozlišč, ki je podana v izreku 5.2.15. V naslednjih posledicah bomo to particijo natančneje opisali.

Posledica 5.2.17 *Naj bo Γ graf hermitskih preslikav nad $\mathbb{F}_q^n$ s premerom $d \geq 3$ in $r > 2$. Naj bosta x in y sosednji vozlišči grafa Γ in naj bo $v \in D_i^{i-1} \cup D_{i-1}^i$ $(1 \leq i \leq d)$. Potem je*

$$|\Gamma(v) \cap D_i^i(1)| = (r-2)((r-1)r^{2i-3} - (-r)^{i-2}).$$

Dokaz. Neposredno iz leme 5.2.10 in formul za presečna števila grafa Γ. ■

Posledica 5.2.18 *Naj bo Γ graf hermitskih preslikav nad $\mathbb{F}_q^n$ s premerom $d \geq 3$ in $r > 2$. Naj bosta x in y sosednji vozlišči grafa Γ in naj bo $v \in D_i^i(0)$ $(2 \leq i \leq d)$. Potem je*

$$|\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)| = \frac{r^{i-1}(r^{i-2} - (-1)^{i-2})}{r+1}$$

in

$$|\Gamma(v) \cap D_i^i(1)| = (r-2)(r-1)r^{2i-3}.$$

Dokaz. Neposredno iz leme 5.2.11 in formul za presečna števila grafa Γ. ■

Posledica 5.2.19 *Naj bo Γ graf hermitskih preslikav nad $\mathbb{F}_q^n$ s premerom $d \geq 3$ in $r > 2$. Naj bosta x in y sosednji vozlišči grafa Γ in naj bo $v \in D_i^i(1)$ $(1 \leq i \leq d)$. Potem je*

$$|\Gamma(v) \cap D_{i-1}^{i-1}(1)| = r^{i-2}\frac{r^{i-1} - (-1)^{i-1}}{r+1}$$

in

$$|\Gamma(v) \cap D_i^i(1)| = \frac{r^{2i-3}(r^3 - 3r^2 + 2) - (-r)^{i-2}(r^2 - 2r - 2) - 1}{r+1}.$$

Dokaz. Neposredno iz leme 5.2.12 in formul za presečna števila grafa Γ. ■

5.3 Dvodelni Q-polinomski razdaljno-regularni grafi s $c_2 = 1$

Naj bo Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$ in s premerom $d \geq 3$. H. Lewis je v [30] pokazala, da je dolžina najkrajšega cikla v Γ največ 6. Kot zelo naravno se zato pojavi vprašanje klasifikacije tistih Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov, v katerih imajo najkrajši cikli dolžino 6. V tem razdelku bomo predstavili rezultat, za katerega upamo, da bo pomagal pri tej klasifikaciji.

Naj bo torej Γ Q-polinomski razdaljno-regularen graf, v katerem imajo najkrajši cikli dolžino 6. Potem je $a_1 = a_2 = 0$ in $c_2 = 1$. Po posledici 5.1.9 je Γ bodisi dvodelen bodisi skoraj dvodelen. Klasifikacijo skoraj dvodelnih Q-polinomskih razdaljno-regularnih grafov, v katerih imajo najkrajši cikli dolžino 6, sta v [28] podala Lang in Terwilliger. Zato privzemimo, da je Γ dvodelen. Po lemi 3.3.1 je Γ 1-homogen, zato se seveda postavi vprašanje, ali je Γ tudi 2-homogen? Odgovor je negativen! Po Nomura [40, Theorem 1.2] imajo vsi 2-homogeni dvodelni razdaljno-regularni grafi z valenco $k \geq 3$ in premerom $d \geq 3$ presečno število $c_2 \geq 2$. Dejstva, da Γ ni 2-homogen, pa ni težko preveriti tudi neposredno.

Naj bosta $x, y \in V\Gamma$ vozlišči grafa Γ, ki sta na razdalji 2. Podobno kot v razdelku 5.2 bomo tudi v tem primeru poiskali particijo vozlišč grafa Γ, ki je nekoliko finejša od particije vozlišč grafa glede na razdaljo od vozlišč x, y. Za to particijo bomo pokazali, da je ekvitabilna in da njeni parametri niso odvisni od izbire vozlišč x, y. Ker morajo biti parametri particije nenegativna cela števila, bomo od tod izpeljali nekaj potrebnih pogojev, katerim morajo zadoščati presečna števila grafa Γ. Upamo, da bodo ti pogoji pripeljali tudi do končne klasifikacije Q-polinomskih dvodelnih razdaljno-regularnih grafov s $c_2 = 1$. Kot primer bomo pokazali, da ni takih grafov s premerom $d = 4$.

Prej kot predstavimo samo particijo, pa dokažimo še naslednji pomožen rezultat, ki ga bomo potrebovali kasneje.

Lema 5.3.1 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera $d \geq 3$. Potem velja:*

(i) $p^1_{i-1,i} = (b_1 b_2 \cdots b_{i-1})/(c_1 c_2 \cdots c_{i-1}) \quad (1 \leq i \leq d)$,

(ii) $p^1_{ii} = a_i (b_1 b_2 \cdots b_{i-1})/(c_1 c_2 \cdots c_i) \quad (1 \leq i \leq d)$,

(iii) $p^2_{i-2,i} = (b_2 b_3 \cdots b_{i-1})/(c_1 c_2 \cdots c_{i-2}) \quad (2 \leq i \leq d)$,

(iv) $p^2_{ii} = (b_2 b_3 \cdots b_{i-1})(c_i b_{i-1} + a_i^2 + c_{i+1} b_i - k - a_1 a_i)/(c_1 c_2 \cdots c_i) \quad (2 \leq i \leq d-1)$.

DOKAZ. Točke (i), (ii) in (iii) sledijo neposredno iz Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Lemma 4.1.7]. Dokažimo še točko (iv). Po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 127, enačba (10)] je

$$b_{i-1} p^1_{i-1,i} + a_i p^1_{ii} + c_{i+1} p^1_{i,i+1} = p^0_{ii} c_1 + p^1_{ii} a_1 + p^2_{ii} b_2.$$

Točka (iv) sledi odtod z uporabo točk (i), (ii) in (iii). ∎

5.3.1 Definicija particije in osnovne lastnosti

Do konca tega razdelka naj bo Γ Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ in s presečnim številom $c_2 = 1$. Izberimo si vozlišči $x, y \in V\Gamma$, ki sta na razdalji 2. Ker je $c_2 = 1$, imata x in y natanko enega skupnega soseda, ki ga označimo z z. Z D^i_j $(0 \leq i, j \leq d)$ označimo množice particije vozlišč grafa Γ glede na razdaljo od vozlišč x in y. Torej

$$D^i_j = D^i_j(x, y) = \{w \in V\Gamma \mid \partial(x, w) = i,\ \partial(y, w) = j\}.$$

Seveda je $|D^i_j| = p^2_{ij}$. V naslednji lemi naštejmo dve več ali manj očitni lastnosti množic D^i_j, ki sta posledici trikotniške neenakosti ter dvodelnosti grafa Γ.

Lema 5.3.2 *Naj bosta i, j nenegativni celi števili, manjši ali enaki d.*

(i) *Če je $|i - j| > 2$, potem je $D^i_j = \emptyset$.*

(ii) *Če je $i + j$ liho število, potem je $D^i_j = \emptyset$.* ∎

Torej so lahko neničelne samo naslednje množice: D^i_i $(1 \leq i \leq d)$ ter D^{i-2}_i, D^i_{i-2} $(2 \leq i \leq d)$. Da so slednje res neničelne, se ni težko prepričati.

Lema 5.3.3 *Za vsak i $(2 \leq i \leq d)$ velja:*

(i) $|D^i_{i-2}| = |D^{i-2}_i| = (b_2 b_3 \cdots b_{i-1})/(c_1 c_2 \cdots c_{i-2})$,

(ii) $D^i_{i-2} \neq \emptyset$, $D^{i-2}_i \neq \emptyset$.

DOKAZ. Neposredno iz 5.3.1(iii), saj je $|D^i_{i-2}| = |D^{i-2}_i| = p^2_{i-2,i}$. ∎

Ker je Γ dvodelen graf, med vozlišči znotraj množice D^i_j ni povezav (sicer bi dobili cikel lihe dolžine). Pokažimo sedaj naslednjo preprosto lemo.

Lema 5.3.4 *Naj bo $z \in D^1_1$ in $w \in D^i_i$ $(1 \leq i \leq d)$. Potem je $\partial(z, w) \in \{i-1, i+1\}$.*

DOKAZ. Iz trikotniške neenakosti dobimo $i - 1 \leq \partial(z, w) \leq i + 1$. Toda če je $\partial(z, w) = i$, potem to pomeni, da je $a_i \neq 0$, saj sta vozlišči x in z povezani, obe pa sta na razdalji i od vozlišča w. To pa je seveda v protislovju z dvodelnostjo grafa Γ. ∎

Lema 5.3.4 nam tako osmisli naslednjo definicijo, v kateri bomo opisali situacijo, s katero se bomo ukvarjali do konca tega razdelka.

Definicija 5.3.5 *Naj bo Γ Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ in s presečnim številom $c_2 = 1$. Izberimo si vozlišči $x, y \in V\Gamma$, tako da je $\partial(x, y) = 2$, z pa naj bo enolično določen skupni sosed vozlišč x in y. Za $0 \leq i, j \leq d$ naj bo*

$$D^i_j = D^i_j(x, y) = \{w \in V\Gamma \mid \partial(x, w) = i,\ \partial(y, w) = j\}.$$

Za $1 \leq i \leq d$ pa definirajmo še

$$D^i_i(1) = \{w \in D^i_i \mid \partial(w, z) = i - 1\} \quad in \quad D^i_i(0) = \{w \in D^i_i \mid \partial(w, z) = i + 1\}.$$

V naslednji lemi strnimo nekaj preprostih lastnosti množic $D^i_i(1)$ in $D^i_i(0)$.

Lema 5.3.6 *Naj bo graf Γ kot v definiciji 5.3.5. Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) *Množica D^i_i je disjunktna unija množic $D^i_i(1)$ in $D^i_i(0)$ $(1 \leq i \leq d)$.*

(ii) $D^1_1(1) = \{z\}$ *in* $D^1_1(0) = \emptyset$.

(iii) $D_d^d(1) = D_d^d$ *in* $D_d^d(0) = \emptyset$. ■

Izračunajmo sedaj moči množic $D_i^i(1)$ in $D_i^i(0)$.

Lema 5.3.7 *Naj bo graf* Γ *kot v definiciji 5.3.5. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) $|D_i^i(1)| = p^1_{i-1,i} - p^2_{i-2,i}$ $(2 \leq i \leq d)$,

(ii) $|D_i^i(0)| = p^2_{ii} - p^1_{i-1,i} + p^2_{i-2,i}$ $(2 \leq i \leq d-1)$.

DOKAZ. (i) Vozlišče w je v množici $D_i^i(1)$ natanko takrat, ko je na razdalji i od vozlišča x, na razdalji $i-1$ od z, vendar ni na razdalji $i-2$ od y. Vseh vozlišč, ki so na razdalji i od x in na razdalji $i-1$ od z, je natanko $p^1_{i-1,i}$. Izmed teh je natanko $p^2_{i-2,i}$ takih, ki so na razdalji $i-2$ od y. Točka (i) je tako dokazana.
(ii) Ker je D_i^i disjunktna unija množic $D_i^i(1)$ in $D_i^i(0)$, je $|D_i^i(0)| = |D_i^i| - |D_i^i(1)|$. Ker je $|D_i^i| = p^2_{ii}$, točka (ii) sedaj sledi iz točke (i). ■

Z uporabo leme 5.3.1 pa sedaj hitro dobimo naslednjo posledico.

Posledica 5.3.8 *Naj bo graf* Γ *kot v definiciji 5.3.5. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i)
$$|D_i^i(1)| = \frac{(b_{i-1}-1)b_2\cdots b_{i-1}}{c_1\cdots c_{i-1}} \quad (2 \leq i \leq d),$$

(ii)
$$|D_i^i(0)| = \frac{(c_{i+1}-1)b_2\cdots b_i}{c_1\cdots c_i} \quad (2 \leq i \leq d-1).$$

■

Lema 5.3.9 *Naj bo graf* Γ *kot v definiciji 5.3.5. Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) *Med vozlišči iz* $D_i^i(0)$ *in vozlišči iz* $D_i^i(1)$ $(2 \leq i \leq d)$ *ni povezav.*

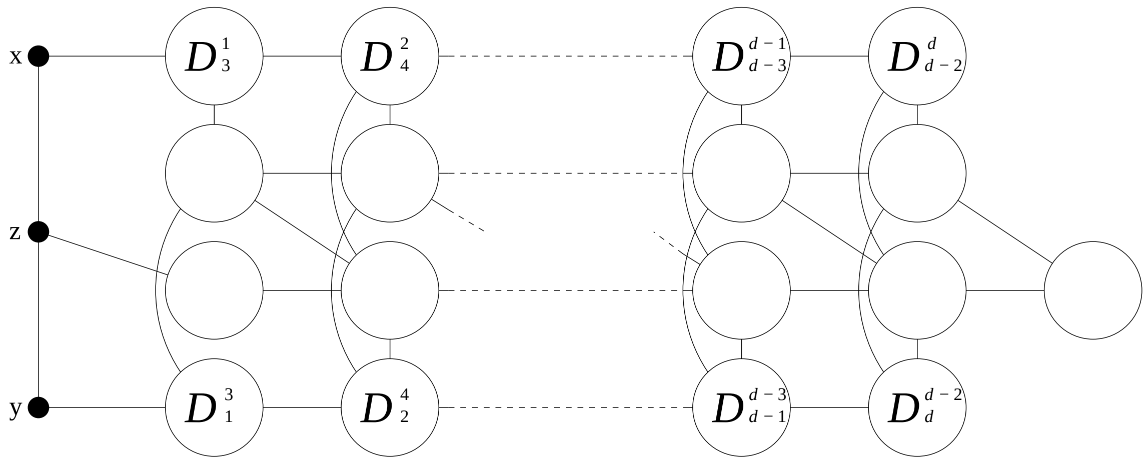
(ii) *Med vozlišči iz* $D_i^i(0)$ *in vozlišči iz* $D_{i-1}^{i-1}(1)$ $(2 \leq i \leq d-1)$ *ni povezav.*

(iii) *Med vozlišči iz* $D_2^2(1)$ *in vozlišči iz* $D_3^1 \cup D_1^3$ *ni povezav.*

DOKAZ. (i) Ker je Γ dvodelen graf, med vozlišči iz množice D_i^i ni nobenih povezav.
(ii) Če bi bil $v \in D_i^i(0)$ povezan z $w \in D_{i-1}^{i-1}$, potem bi bilo $\partial(z, v) = i-2+1 = i-1$, kar pa je v protislovju z definicijo množice $D_i^i(0)$.
(iii) Naj bo $w \in D_2^2(1)$. Vozlišče z je skupni sosed w in x, zato w nima sosedov v D_3^1. Ker pa je z tudi skupni sosed vozlišč w in y, w nima sosedov tudi v D_1^3. ■

S pomočjo lastnosti, ki smo jih dobili iz leme 5.3.2, leme 5.3.6 in leme 5.3.9, lahko particijo vozlišč grafa Γ na množice D_{i-2}^i, D_i^{i-2} $(2 \leq i \leq d)$, $D_i^i(1)$ $(1 \leq i \leq d)$ in $D_i^i(0)$ $(2 \leq i \leq d-1)$ grafično predstavimo na sliki 5.6.

Naslednja lema nam pove, katere parametre te particije že poznamo in kateri so zaenkrat še neznani.



Slika 5.6: Particija vozlišč grafa Γ. Krogi v sredini slike predstavljajo množice $D_i^i(0)$ ($2 \le i \le d-1$) (zgornja vrsta), ter množice $D_i^i(1)$ ($2 \le i \le d$) (spodnja vrsta). Hitro se tudi lahko prepričamo, da je $\Gamma_i(x) = D_{i-2}^i \cup D_i^i(1) \cup D_i^i(0) \cup D_{i+2}^i$ in $\Gamma_i(y) = D_i^{i-2} \cup D_i^i(0) \cup D_i^i(1) \cup D_i^{i+2}$.

Lema 5.3.10 *Naj bo graf Γ kot v definiciji 5.3.5. Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) *Za vsako naravno število i ($2 \le i \le d$) je vsak $w \in D_{i-2}^i$ (oziroma D_i^{i-2}) sosedenj*
   (a) *natanko* c_{i-2} *vozliščem iz D_{i-3}^{i-1} (oziroma D_{i-1}^{i-3}),*
   (b) *natanko* b_i *vozliščem iz D_{i-1}^{i+1} (oziroma D_{i+1}^{i-1}),*
   (c) *natanko* $c_{i-1} - c_{i-2}$ *vozliščem iz $D_{i-1}^{i-1}(1)$,*
   (d) *natanko* $c_i - c_{i-1}$ *vozliščem iz $D_{i-1}^{i-1}(0)$,*

   in nobenim drugim vozliščem iz $V\Gamma$.

(ii) *Za vsako naravno število i ($2 \le i \le d-1$) je vsak $w \in D_i^i(0)$ sosedenj*
   (a) *natanko* b_{i+1} *vozliščem iz $D_{i+1}^{i+1}(0)$,*
   (b) *natanko* $c_i - |\Gamma(w) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)|$ *vozliščem iz D_{i-1}^{i+1},*
   (c) *natanko* $c_i - |\Gamma(w) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)|$ *vozliščem iz D_{i+1}^{i-1},*
   (d) *natanko* $b_i + |\Gamma(w) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)| - c_i - b_{i+1}$ *vozliščem iz $D_{i+1}^{i+1}(1)$,*
   (e) *natanko* $|\Gamma(w) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)|$ *vozliščem iz $D_{i-1}^{i-1}(0)$,*

   in nobenim drugim vozliščem iz $V\Gamma$.

(iii) *Za vsako naravno število i ($1 \le i \le d$) je vsak $w \in D_i^i(1)$ sosedenj*
   (a) *natanko* c_{i-1} *vozliščem iz $D_{i-1}^{i-1}(1)$,*
   (b) *natanko* $b_i - |\Gamma(w) \cap D_{i+1}^{i+1}(1)|$ *vozliščem iz D_{i-1}^{i+1},*
   (c) *natanko* $b_i - |\Gamma(w) \cap D_{i+1}^{i+1}(1)|$ *vozliščem iz D_{i+1}^{i-1},*
   (d) *natanko* $c_i + |\Gamma(w) \cap D_{i+1}^{i+1}(1)| - b_i - c_{i-1}$ *vozliščem iz $D_{i-1}^{i-1}(0)$,*
   (e) *natanko* $|\Gamma(w) \cap D_{i+1}^{i+1}(1)|$ *vozliščem iz $D_{i+1}^{i+1}(1)$,*

   in nobenim drugim vozliščem iz $V\Gamma$.

Dokaz. (i) Točka (a) sledi iz dejstva, da je $\Gamma(w) \cap \Gamma_{i-3}(x) \subseteq D_{i-3}^{i-1}$ (oziroma $\Gamma(w) \cap \Gamma_{i-3}(y) \subseteq D_{i-1}^{i-3}$). Podobno točka (b) sledi iz dejstva, da je $\Gamma(w) \cap \Gamma_{i+1}(y) \subseteq D_{i-1}^{i+1}$ (oziroma $\Gamma(w) \cap \Gamma_{i+1}(x) \subseteq D_{i+1}^{i-1}$). Dokažimo sedaj točko (c). Ker je w na razdalji $i-1$ od z, poteka od w do z natanko $c_{i-1}c_{i-2}\cdots c_1$ poti dolžine $i-1$. Ker ima w natanko c_{i-2} sosedov v D_{i-3}^{i-1} (oziroma D_{i-1}^{i-3}), gre natanko $c_{i-2}c_{i-2}c_{i-3}\cdots c_1$ od teh poti skozi D_{i-3}^{i-1} (oziroma D_{i-1}^{i-3}). Ostalih $(c_{i-1}-c_{i-2})c_{i-2}\cdots c_1$ poti mora torej potekati skozi $D_{i-1}^{i-1}(1)$. Naj bo $v \in D_{i-1}^{i-1}(1)$. Ker je $\partial(v,z) = i-2$, poteka od v do z natanko $c_{i-2}\cdots c_1$ poti dolžine $i-2$. Torej mora w imeti v $D_{i-1}^{i-1}(1)$ natanko $c_{i-1}-c_{i-2}$ sosedov. Točka (d) je sedaj trivialna, saj je Γ regularen graf s stopnjo $k = b_i + c_i$.

(ii) Ker je $\partial(w,z) = i+1$, mora imeti w natanko b_{i+1} sosedov v $\Gamma_{i+2}(z)$. Toda $\Gamma_{i+2}(z) \cap \Gamma(w) \subseteq D_{i+1}^{i+1}(0)$ in točka (a) sledi. Dokaz točk (b), (c), (d) in (e) sedaj sledi iz dejstva, da je $\Gamma_i(x) = D_{i-2}^i \cup D_i^i(1) \cup D_i^i(0) \cup D_{i+2}^i$ in $\Gamma_i(y) = D_i^{i-2} \cup D_i^i(0) \cup D_i^i(1) \cup D_i^{i+2}$.

(iii) Ker je $\partial(w,z) = i-1$, mora imeti w natanko c_{i-1} sosedov v $\Gamma_{i-2}(z)$. Toda $\Gamma_{i-2}(z) \cap \Gamma(w) \subseteq D_{i-1}^{i-1}(1)$ in točka (a) sledi. Dokaz točk (b), (c), (d) in (e) sedaj sledi iz dejstva, da je $\Gamma_i(x) = D_{i-2}^i \cup D_i^i(1) \cup D_i^i(0) \cup D_{i+2}^i$ in $\Gamma_i(y) = D_i^{i-2} \cup D_i^i(0) \cup D_i^i(1) \cup D_i^{i+2}$. ■

5.3.2 Ekvitabilnost particije

V tem podrazdelku bomo pokazali, da je particija vozlišč grafa Γ, ki smo jo definirali v prejšnjem razdelku, ekvitabilna ter da njeni parametri niso odvisni od izbire vozlišč x, y. Po lemi 5.3.10 moramo pokazati le, da je število $|\Gamma(w) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)|$ $(2 \le i \le d-1)$ neodvisno od izbire $w \in D_i^i(0)$ ter x in y, in da je število $|\Gamma(w) \cap D_{i+1}^{i+1}|$ $(1 \le i \le d-1)$ neodvisno od izbire $w \in D_i^i(1)$ ter x in y. To bomo pokazali v naslednji lemi. Naj tudi pripomnimo, da šele v tej lemi prvič rabimo Q-polinomsko lastnost grafa Γ (zaradi uporabe Terwilligerjeve karakterizacije Q-polinomske lastnosti - glej izrek 2.4.2).

Lema 5.3.11 *Naj bo Γ dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \ge 3$, premera $d \ge 3$ in s presečnim številom $c_2 = 1$. Naj bo E netrivialen glavni idempotent grafa Γ in naj bo $\theta_0^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_d^*$ pripadajoče zaporedje dualnih lastnih vrednosti. Naj bo Γ Q-polinomski glede na E. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) *Za $2 \le i \le d-1$ in za $w \in D_i^i(0)$ je*

$$|\Gamma(w) \cap D_{i-1}^{i-1}(0)| = c_i \frac{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_3^* - \theta_{i+1}^*) - (\theta_1^* - \theta_{i-1}^*)(\theta_2^* - \theta_i^*)}{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_{i-1}^* - \theta_{i+1}^*)}.$$

(ii) *Za $1 \le i \le d-1$ in za $w \in D_i^i(1)$ je*

$$|\Gamma(w) \cap D_{i+1}^{i+1}(1)| = b_i \frac{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_3^* - \theta_{i-1}^*) - (\theta_1^* - \theta_{i+1}^*)(\theta_2^* - \theta_i^*)}{(\theta_0^* - \theta_i^*)(\theta_{i+1}^* - \theta_{i-1}^*)}.$$

DOKAZ. (i) Označimo $\tau = |\Gamma(w) \cap D^{i-1}_{i-1}(0)|$ in $\eta = |\Gamma(w) \cap D^{i-1}_{i+1}|$. Ni se težko prepričati, da je $\tau + \eta = c_i$. Po izreku 2.4.2 dobimo

$$\sum_{\substack{v \in V\Gamma \\ \partial(x,v)=i-1 \\ \partial(w,v)=1}} Ev - \sum_{\substack{v \in V\Gamma \\ \partial(x,v)=1 \\ \partial(w,v)=i-1}} Ev = c_i \frac{\theta^*_{i-1} - \theta^*_1}{\theta^*_0 - \theta^*_i}(Ex - Ew). \tag{5.10}$$

Opazimo, da je $\{v \in V\Gamma \mid \partial(x,v) = 1,\ \partial(w,v) = i-1\} \subseteq D^1_3$.

Če enačbo (5.10) skalarno pomnožimo z $(|V\Gamma|/m)Ey$, kjer je m večkratnost lastne vrednosti, ki pripada glavnemu idempotentu E, ter uporabimo lemo 2.3.5(i), dobimo

$$\tau\theta^*_{i-1} + \eta\theta^*_{i+1} - c_i\theta^*_3 = c_i \frac{\theta^*_{i-1} - \theta^*_1}{\theta^*_0 - \theta^*_i}(\theta^*_2 - \theta^*_i).$$

Če pa upoštevamo še $\eta = c_i - \tau$, dobimo

$$\tau(\theta^*_{i-1} - \theta^*_{i+1}) = c_i \frac{(\theta^*_0 - \theta^*_i)(\theta^*_3 - \theta^*_{i+1}) - (\theta^*_1 - \theta^*_{i-1})(\theta^*_2 - \theta^*_i)}{(\theta^*_0 - \theta^*_i)}.$$

Ker pa so po lemi 2.4.1 dualne lastne vrednosti paroma različne, dobimo

$$\tau = c_i \frac{(\theta^*_0 - \theta^*_i)(\theta^*_3 - \theta^*_{i+1}) - (\theta^*_1 - \theta^*_{i-1})(\theta^*_2 - \theta^*_i)}{(\theta^*_0 - \theta^*_i)(\theta^*_{i-1} - \theta^*_{i+1})}.$$

Točka (i) je tako dokazana.

(ii) Označimo $\tau_1 = |\Gamma(w) \cap D^{i+1}_{i+1}(1)|$ in $\eta_1 = |\Gamma(w) \cap D^{i+1}_{i-1}|$. Zopet opazimo, da je $\tau_1 + \eta_1 = b_i$. Po izreku 2.4.2 dobimo

$$\sum_{\substack{v \in V\Gamma \\ \partial(x,v)=i+1 \\ \partial(w,v)=1}} Ev - \sum_{\substack{v \in V\Gamma \\ \partial(x,v)=1 \\ \partial(w,v)=i+1}} Ev = b_i \frac{\theta^*_{i+1} - \theta^*_1}{\theta^*_0 - \theta^*_i}(Ex - Ew). \tag{5.11}$$

Dokaz nadaljujemo kot v točki (i). ■

Naša naslednja naloga je pokazati, da so množice $D^i_i(0)$ $(2 \le i \le d-1)$ in $D^i_i(1)$ $(1 \le i \le d)$ neprazne. Zato pa najprej potrebujemo naslednji rezultat.

Lema 5.3.12 *Naj bo Γ Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \ge 3$, premera $d \ge 3$ in s presečnim številom $c_2 = 1$. Potem velja:*

(i) $2 \le c_3 \le \cdots \le c_d$,

(ii) $b_0 \ge b_1 \ge \cdots \ge b_{d-1} \ge 2$.

DOKAZ. (i) Po Lewis [30, Theorem 28] imamo $c_3 \geq 2$, po izreku 2.3.3 pa še $c_3 \leq c_4 \leq \cdots \leq c_d$. Točka (i) je s tem dokazana.
(ii) Po izreku 2.3.3 je $b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_{d-1}$. Pokazati moramo še $b_{d-1} \geq 2$. Pomagali si bomo z rezultati Caughmanovega članka [9]. Recimo, da je $b_{d-1} = 1$. V tem primeru je $p^2_{2,d} = 0$. Definirajmo število δ takole:

$$2\delta = \max\{i + j - d \mid 0 \leq i, j \leq d,\ p^d_{ij} \neq 0\}.$$

Iz Caughman [9, Lemma 8.3] dobimo, da je $\delta < 1$. Ker je $p^d_{0,d} = 1$, je δ nenegativno število. Ker pa je Γ dvodelen, iz $p^d_{ij} \neq 0$ sledi, da je $i + j + d$ sodo število, zato je tudi $i + j - d$ sodo število. Torej je $\delta = 0$. Izberimo si vozlišče $u \in V\Gamma$ in definirajmo graf Γ^2_d:

$$V\Gamma^2_d = \Gamma_d(u), \quad E\Gamma^2_d = \{(v, w) \in V\Gamma^2_d \times V\Gamma^2_d \mid \partial_\Gamma(v, w) = 2\}.$$

Po Caughman [9, Theorem 9.2] je Γ^2_d povezan graf premera δ. Ker pa je $\delta = 0$, mora imeti graf Γ^2_d samo eno vozlišče. Torej je $|\Gamma_d(u)| = k_d = 1$, po Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 5.1.1] pa je zato Γ antipoden graf indeksa 2. Po Curtinovem rezultatu [11, Theorem 42] je Γ 2-homogen. Kot smo omenili že v uvodu tega razdelka, imajo vsi 2-homogeni dvodelni razdaljno-regularni grafi presečno število $c_2 \geq 2$, glej Nomura [40, Theorem 1.2]. To pa je protislovje! Zaključimo lahko, da je $b_{d-1} \geq 2$. ∎

Lema 5.3.13 *Naj bo Γ Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ in s presečnim številom $c_2 = 1$. Potem*

(i) $D^i_i(0) \neq \emptyset$ $(2 \leq i \leq d-1)$,

(ii) $D^i_i(1) \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq d)$.

DOKAZ. (i) Neposredno iz posledice 5.3.8(ii), ker je po lemi 5.3.12(i) $c_{i+1} > 1$.
(ii) Neposredno iz posledice 5.3.8(i), ker je po lemi 5.3.12(ii) $b_{i-1} > 1$. ∎

Izrek 5.3.14 *Naj bo Γ Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ in s presečnim številom $c_2 = 1$. Potem je particija vozlišč grafa Γ na množice D^{i-2}_i, D^i_{i-2} $(2 \leq i \leq d)$, $D^i_i(1)$ $(1 \leq i \leq d)$ in $D^i_i(0)$ $(2 \leq i \leq d)$ ekvitabilna, njeni parametri pa niso odvisni od izbire vozlišč x in y.*

DOKAZ. Lema 5.3.10 in lema 5.3.11 nam povesta, da je particija ekvitabilna in da njeni parametri niso odvisni od izbire vozlišč x in y. Lema 5.3.3(ii) in lema 5.3.13 pa dokazujeta, da so množice particije neprazne. ∎

5.3.3 Pogoji

V tem podrazdelku bomo dokazali nekaj potrebnih pogojev, katerim morajo ustrezati presečna števila grafa Γ. Najprej dokažimo drugo verzijo leme 5.3.11.

Lema 5.3.15 *Naj bo Γ Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d \geq 3$ in s presečnim številom $c_2 = 1$. Potem veljata naslednji trditvi:*

(i) *Za* $2 \le i \le d-1$ *in za* $w \in D^i_i(0)$ *je*

$$|\Gamma(w) \cap D^{i-1}_{i-1}(0)| = \frac{c_i(c_i-1)}{c_{i+1}-1}.$$

(ii) *Za* $1 \le i \le d-1$ *in za* $w \in D^i_i(1)$ *je*

$$|\Gamma(w) \cap D^{i+1}_{i+1}(1)| = \frac{b_i(b_i-1)}{b_{i-1}-1}.$$

Dokaz. (i) Najprej hitro opazimo, da lema drži za $i = 2$. Zato privzemimo, da je $i \ge 3$. Po lemi 5.3.10(ii) ima vsako vozlišče iz $D^{i-1}_{i-1}(0)$ natanko b_i sosedov v $D^i_i(0)$. Po lemi 5.3.11 pa ima vsako vozlišče iz $D^i_i(0)$ natanko τ sosedov v $D^{i-1}_{i-1}(0)$. Torej imamo

$$|D^{i-1}_{i-1}(0)| b_i = |D^i_i(0)| \tau.$$

Če izračunamo τ z uporabo posledice 5.3.8(ii), dobimo $\tau = c_i(c_i-1)/(c_{i+1}-1)$.
(ii) Zopet opazimo, da trditev drži za $i = 1$, zato privzemimo $i \ge 2$. Po lemi 5.3.10(iii) ima vsako vozlišče iz $D^{i+1}_{i+1}(1)$ natanko c_i sosedov v $D^i_i(1)$. Po drugi strani pa ima po lemi 5.3.11 vsako vozlišče iz $D^i_i(1)$ natanko τ_1 sosedov v $D^{i+1}_{i+1}(1)$. Spet torej dobimo

$$|D^i_i(1)| \tau_1 = |D^{i+1}_{i+1}(1)| c_i.$$

Če izračunamo τ_1 z uporabo posledice 5.3.8(i), dobimo $\tau_1 = b_i(b_i-1)/(b_{i-1}-1)$. ■

Izrek 5.3.16 *Naj bo* Γ *Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje* $k \ge 3$, *premera* $d \ge 3$ *in s presečnim številom* $c_2 = 1$. *Potem*

(i) $c_{i+1} - 1$ *deli* $c_i(c_i - 1)$ *za* $2 \le i \le d-1$,

(ii) $b_{i-1} - 1$ *deli* $b_i(b_i - 1)$ *za* $1 \le i \le d-1$.

Dokaz. Neposredno iz leme 5.3.15, saj morajo biti števila $c_i(c_i-1)/(c_{i+1}-1)$ $(2 \le i \le d-1)$ in $b_i(b_i-1)/(b_{i-1}-1)$ $1 \le i \le d-1$ nenegativna cela števila. ■

Posledica 5.3.17 *Naj bo* Γ *Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje* $k \ge 3$, *premera* $d \ge 3$ *in s presečnim številom* $c_2 = 1$. *Potem* $k-2$ *deli* $(c_3-1)(c_3-2)$. *Torej, ali je* $c_3 = 2$ *ali pa* $(c_3-1)(c_3-2) \ge k-2$.

Dokaz. Po izreku 5.3.16(ii) število $b_2 - 1 = k - 2$ deli število $b_3(b_3-1) = (k-2-c_3+2)(k-2-c_3+1)$. Torej $k-2$ deli število $(c_3-1)(c_3-2)$. Posledica je tako dokazana. ■

5.3.4 Primer $d = 4$

V tem podrazdelku bomo pokazali, da ne obstaja Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d = 4$ in s presečnim številom $c_2 = 1$.

Izrek 5.3.18 *Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d = 4$ in s presečnim številom $c_2 = 1$ ne obstaja.*

DOKAZ. Naj bo Γ Q-polinomski dvodelen razdaljno-regularen graf stopnje $k \geq 3$, premera $d = 4$ in s presečnim številom $c_2 = 1$. Pokazali bomo, da mora biti v tem primeru presečno število b_3 grafa Γ enako 1, kar pa je seveda v protislovju z lemo 5.3.12(ii)

Označimo $b = k - 1$ in $c = c_3 - 1$. Ker je $c_4 = k$, po izreku 5.3.16 obstaja nenegativno celo število α, da je $c(c + 1) = \alpha b$. Dalje, ker je $b_2 = k - 1$, po izreku 5.3.16 dobimo, da $k - 2$ deli $b_3(b_3 - 1) = (k - 2 - c_3 + 2)(k - 2 - c_3 + 1)$. Torej obstaja nenegativno celo število β, da je $c(c - 1) = \beta(b - 1)$. Če je $c = 1$, potem je $\alpha b = 2$. Od tod pa sledi $k = 3$ in zato $b_3 = 1$. Privzemimo sedaj, da je $c > 1$. Potem imamo

$$\frac{c+1}{c-1} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{b}{b-1}.$$

Ker je zaporedje $(n + 1)/(n - 1)$ $(2 \leq n)$ padajoče in ker je $2 \leq c \leq b - 1$, dobimo $(c + 1)/(c - 1) \geq b/(b - 2) > b/(b - 1)$. Zato je $\alpha/\beta > 1$ in $\beta = \alpha - a$ za neko naravno število a. Če odštejemo enačbi $c^2 + c = \alpha b$ in $c^2 - c = (\alpha - a)(b - 1)$, dobimo $2c = \alpha + ab - a$.

Vzemimo najprej $a \geq 2$. Potem imamo $c = (\alpha + a(b - 1))/2 \geq 1 + b - 1 = b$, kar je protislovje. Torej $a = 1$ in $c = (\alpha + b - 1)/2$. Zato imamo $c^2 + c = c(c + 1) = (\alpha + b - 1)(\alpha + b + 1)/4 = \alpha b$, oziroma $(\alpha - b - 1)(\alpha - b + 1) = 0$. Če je $\alpha = b + 1$, potem je $c = b$, kar je zopet protislovje. Torej je $\alpha = b - 1$, kar pa pomeni $c_3 = k - 1$ in zato $b_3 = 1$. ∎

Poglavje 6

Konstrukcija razdaljno-regularnih dvojnih krovov

Nove konstrukcije razdaljno-regularnih grafov so ena izmed najbolj pomembnih nalog teorije razdaljno-regularnih grafov. Z njihovo pomočjo lahko razvijemo nove tehnike proučevanja struktur in objektov, ki jih raziskujemo. Nove konstrukcije nam dostikrat ponudijo nov pogled na konstruirane objekte, zato lahko z njihovo pomočjo bolje razumemo zgradbo ter nekatere lastnosti teh objektov. Nenazadnje pa je lahko vsaka nova konstrukcija začetek klasifikacije oziroma karakterizacije konstruiranih objektov.

Naj bo G razdaljno-regularen graf. V tem poglavju bomo opisali postopek, kako lahko iz grafa G konstruiramo nov graf H, za katerega se izkaže, da je v nekaterih posebnih primerih antipoden razdaljno-regularen graf indeksa 2. Konstrukcijo sta prva opisala B. Martin in A. Munemasa [32]. Za poseben primer le-te (ko je premer grafa G enak 3) sta tudi dokazala zadosten in potreben pogoj, da so konstruirani grafi razdaljno-regularni. Metode dokazovanja, ki sta jih uporabljala, so bile povsem algebraične. Podali bomo neodvisen dokaz njunih rezultatov, naše metode dokazovanja pa bodo povsem kombinatorične. Pomagali si bomo namreč z ekvitabilnimi particijami, ki močno spominjajo na ekvitabilne particije 1-homogenih grafov. Poleg tega bomo njun rezultat posplošili še na primer, ko je premer grafa G enak 2 ali 4.

V prvem razdelku tega poglavja bomo konstrukcijo opisali in navedli nekaj glavnih značilnosti grafov, ki jih s to konstrukcijo dobimo. V drugem razdelku si bomo pobliže ogledali tri neskončne družine razdaljno-regularnih grafov, ki jih lahko dobimo z opisano konstrukcijo. V nadaljnih razdelkih pa bomo študirali nekaj posebnih primerov te konstrukcije. Rezultati tega poglavja so skupno delo s A. Jurišićem.

6.1 Konstrukcija

V tem razdelku bomo opisali konstrukcijo grafov, za katere se bo v nekaterih primerih izkazalo, da so antipodni razdaljno-regularni grafi indeksa 2. Dokazali bomo tudi, da obstaja ekvitabilna particija vozlišč tako konstruiranih grafov. Kot bomo videli, ta particija zelo spominja na ekvitabilno particijo vozlišč 1-homogenih grafov.

Konstrukcija 6.1.1 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera d, A_1 njegova matrika sosednosti in A_d njegova d-ta razdaljna matrika. Naj bo H graf, katerega matrika sosednosti A je enaka*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_d \\ A_d & A_1 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Ker je matrika A simetrična z ničlami po diagonali, je graf H je seveda dobro definiran, brez zank in večkratnih povezav.
Graf H lahko opišemo tudi takole. Množica vozlišč VH grafa H je enaka

$$VH = \{(v,i) \mid v \in VG, i \in \mathbb{Z}_2\},$$

vozlišči (v,i) in (u,j) grafa H pa sta sosednji natanko takrat, ko je

(i) $i = j$ in sta vozlišči v in u sosednji v grafu G, ali ko je

(ii) $i \neq j$ in sta vozlišči v in u v grafu G na razdalji d.

Do konca tega poglavja naj bosta torej G in H grafa, ki sta definirana v konstrukciji 6.1.1. Naj bo (v,i) vozlišče grafa H. Ker je njegova druga komponenta element obsega $\mathbb{Z}_2$, bomo pri računanju z njo uporabljali aritmetiko obsega $\mathbb{Z}_2$. Množico vozlišč, ki so za ℓ oddaljene od vozlišča (v,i), bomo namesto $H_\ell((v,i))$ krajše označevali s $H_\ell(v,i)$. V primeru, ko je $\ell = 1$, pa bomo oznako $H_1(v,i)$ skrajšali v $H(v,i)$.
Problem, s katerim se bomo v tem poglavju ukvarjali, je naslednji.

Problem 6.1.2 *Kdaj je graf H, konstruiran v 6.1.1, razdaljno-regularen?*

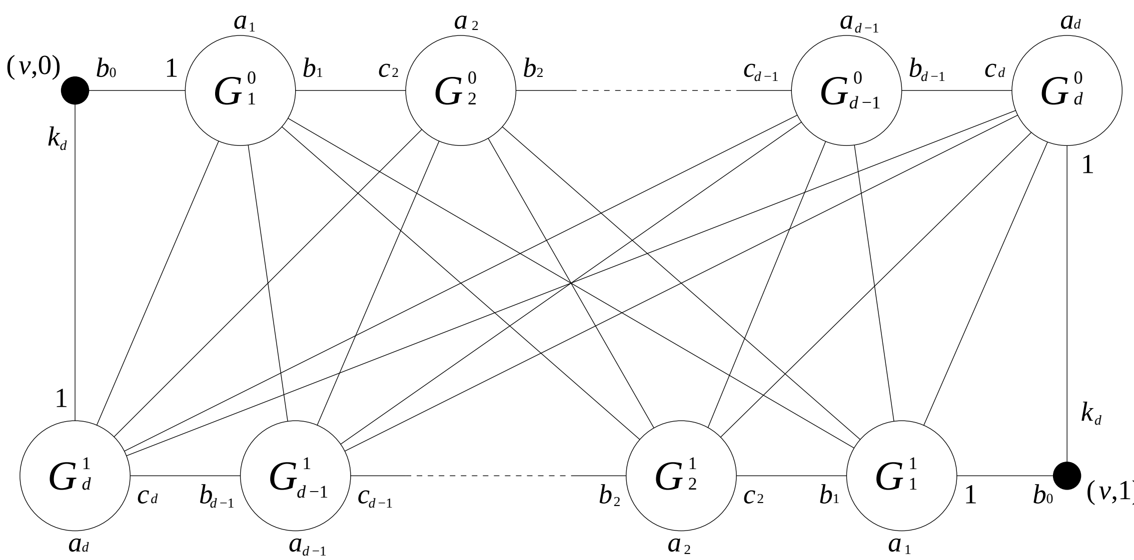
Zaradi lažjega izražanja vpeljimo naslednjo definicijo. Za poljubno vozlišče $v \in VG$ ter števili $i \in \mathbb{Z}_2$ in $j \in \{0, \ldots, d\}$ definirajmo naslednjo množico:

$$G_j^i = G_j^i(v) = \{(u,i) \mid u \in G_j(v)\}.$$

Ker je indeks i množice G_j^i element obsega $\mathbb{Z}_2$, bomo pri računanju z njim zopet uporabljali aritmetiko obsega $\mathbb{Z}_2$. Grafično graf H predstavimo na sliki 6.1. Pri tem je d premer grafa G, a_i, b_i, c_i $(0 \leq i \leq d)$ pa njegova presečna števila.
Pri reševanju problema 6.1.2 nam bo v veliko pomoč naslednja preprosta lema.

Lema 6.1.3 *Naj bo $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; 1, c_2, \ldots, c_d\}$ presečna tabela grafa G in v poljubno njegovo vozlišče. Potem je particija vozlišč grafa H, podana na sliki 6.1, ekvitabilna, parametri te particije pa so neodvisni od izbire vozlišča v.*

DOKAZ. Naj bosta $j, \ell \in \{0, \ldots, d\}$ ter $i \in \mathbb{Z}_2$. Vsako vozlišče iz množice G_j^i ima v množici G_ℓ^i natanko $p_{1,\ell}^j(G)$ sosedov, v množici G_ℓ^{i+1} pa natanko $p_{d,\ell}^j(G)$ sosedov. ■



Slika 6.1: Graf H iz konstrukcije 6.1.1. Povezave med množicama G_j^0 in G_ℓ^1 obstajajo natanko takrat, ko je presečno število $p_{d\ell}^j$ grafa G različno od 0

6.2 Neskončne družine

Naj bo n naravno število. V tem razdelku si bomo ogledali tri neskončne družine razdaljno-regularnih grafov, ki jih lahko dobimo s pomočjo konstrukcije 6.1.1: n-kocke ($n \geq 2$), polovične n-kocke ($n \geq 3$) ter Johnsonove grafe $J(2n, n)$ ($n \geq 2$).

Izrek 6.2.1 (i) *Naj bo $n \geq 2$ poljubno naravno število, graf G pa naj bo n-kocka. Potem je graf, ki ga dobimo iz grafa G s konstrukcijo 6.1.1, $(n+1)$-kocka.*

(ii) *Naj bo $n \geq 3$ poljubno naravno število, graf G pa naj bo polovična n-kocka. Potem je graf, ki ga dobimo iz grafa G s konstrukcijo 6.1.1, polovična $(n+1)$-kocka.*

DOKAZ. (i) Graf G lahko konstruiramo takole: njegova množica vozlišč so vse n-terice ničel in enic, vozlišči pa sta povezani natanko tedaj, ko se ustrezni n-terici razlikujeta v natanko eni komponenti. Analogno definiramo $(n+1)$-kocko H'. Graf H naj bo graf, ki ga dobimo iz grafa G s konstrukcijo 6.1.1. Pokažimo, da sta grafa H in H' izomorfna.

Naj bo X_n množica vseh n-teric sestavljenih iz ničel in enic. Za $a \in X_n$ in poljubno naravno število $i \in \{1, \ldots, n\}$ označimo i-to komponento n-terice a z $a(i)$. Definirajmo n-terico $\overline{a}$ takole: za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ naj bo $\overline{a}(i) = 1$, če je $a(i) = 0$, ter $\overline{a}(i) = 0$, če je $a(i) = 1$.

Seveda lahko množico vozlišč grafov H in H' identificiramo z množico $X_{n+1} = \{(a, j) \mid a \in X_n,\ j \in \{0, 1\}\}$. Vozlišči $(a, i), (b, i) \in X_{n+1}$ sta povezani v grafih H in H' natanko takrat, ko sta a in b povezani v grafu G. Vozlišči $(a, 0), (b, 1) \in X_{n+1}$ pa sta povezani v grafu H natanko takrat, ko je $b = \overline{a}$, v grafu H' pa natanko takrat, ko je $a = b$.

Konstruirajmo sedaj preslikavo $f : X_{n+1} \longrightarrow X_{n+1}$ takole: za vsak $a \in X_n$ naj bo $f((a,0)) = (a,0)$ in $f((a,1)) = (\overline{a},1)$. Seveda je preslikava f bijekcija, pravtako pa se ni težko prepričati, da je f izomorfizem grafov H in H'.

(ii) Ker sta $(n+1)$-kocka in graf H, ki ga dobimo iz n-kocke s konstrukcijo 6.1.1, izomorfna, sta izomorfna tudi njuna polovična grafa. Seveda pa je polovični graf grafa H ravno graf, ki ga dobimo s konstrukcijo 6.1.1 iz polovičnega grafa n-kocke. ∎

Izrek 6.2.2 *Naj bo $n \geq 2$ poljubno naravno število in naj bo graf G Johnsonov graf $J(2n-1, n-1)$. Potem je graf H, ki ga dobimo iz grafa G s konstrukcijo 6.1.1, Johnsonov graf $J(2n,n)$.*

Opomba: Za definicijo Johnsonovih grafov glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.1].

DOKAZ. Naj bo $X = \{1, \dots, 2n-1\}$. Vozlišča grafa G (torej Johnsonovega grafa $J(2n-1, n-1)$) so vse $(n-1)$-elementne podmnožice množice X, dve vozlišči pa sta povezani natanko takrat, ko ima presek ustreznih podmnožic $n-2$ elementov. Vozlišča Johnsonovega grafa $J(2n,n)$ pa so vse n-elementne podmnožice množice $X \cup \{2n\}$, dve vozlišči pa sta povezani natanko takrat, ko ima presek ustreznih podmnožic $n-1$ elementov. Graf H, ki ga dobimo s konstrukcijo 6.1.1 iz grafa G, pa ima množico vozlišč $\{(a,i) \mid a \subset X,\ |a| = n-1,\ i \in \{0,1\}\}$. Vozlišči (a,i) in (b,i) grafa H sta povezani natanko takrat, ko je $|a \cap b| = n-2$, vozlišči $(a,0)$ in $(b,1)$ pa natanko takrat, ko je $a \cap b = \emptyset$. Pokazali bomo, da sta grafa $J(2n,n)$ in H izomorfna.

Kostruirajmo preslikavo f iz množice vozlišč grafa H v množico vozlišč grafa $J(2n,n)$: $f((a,0)) = a \cup \{2n\}$ in $f((a,1)) = X \setminus a$ za vsako $n-1$ elementno podmnožico a množice X. Seveda je moč množic $a \cup \{2n\}$ in $X \setminus a$ v primeru, ko je $|a| = n-1$, enaka n, zato preslikava f res slika v množico vozlišč grafa $J(2n,n)$. Hitro se lahko tudi prepričamo, da je f injektivna preslikava. Če sta namreč a in b dve različni $n-1$ elementni podmnožici množice X, potem so tudi $f((a,0)) = a \cup \{2n\}$, $f((a,1)) = X \setminus a$, $f((b,0)) = b \cup \{2n\}$ in $f((b,1)) = X \setminus b$ paroma različne n elementne podmnožice množice $X \cup \{2n\}$. Ker pa imata domena in kodomena funkcije f enako moč, je funkcija f tudi surjetktivna. Prepričajmo se še, da je funkcija f tudi izomorfizem grafov H in $J(2n,n)$. Oglejmo si tri različne primere.

Primer 1: naj bosta $(a,0)$ in $(b,0)$ povezani vozlišči grafa H. To pomeni, da je $|a \cap b| = n-2$. Zato je $|f((a,0)) \cap f((b,0))| = |(a \cup \{2n\}) \cap (b \cup \{2n\})| = n-1$, kar pa seveda pomeni, da sta $f((a,0))$ in $f((b,0))$ povezani v grafu $J(2n,n)$.

Primer 2: naj bosta $(a,1)$ in $(b,1)$ povezani vozlišči grafa H. To pomeni, da je $|a \cap b| = n-2$. Torej je $f((a,1)) \cap f((b,1)) = (X \setminus a) \cap (X \setminus b) = X \setminus (a \cup b)$, ter zato $|f((a,1)) \cap f((b,1))| = |X| - (|a| + |b| - |a \cap b|) = 2n-1-((n-1)+(n-1)-(n-2)) = n-1$. Vozlišči $f((a,1))$ in $f((b,1))$ sta torej povezani v grafu $J(2n,n)$.

Primer 3: naj bosta $(a,0)$ in $(b,1)$ povezani vozlišči grafa H. To pomeni, da je $a \cap b = \emptyset$. Seveda je potem $f((a,0)) \cap f((b,1)) = (a \cup \{2n\}) \cap (X \setminus b) = a$. Torej je

$|f((a,0)) \cap f((b,1))| = |a| = n-1$, kar pa spet pomeni, da sta $f((a,0))$ in $f((b,1))$ povezani vozlišči grafa $J(2n,n)$.
Grafa H in $J(2n,n)$ sta torej izomorfna in s tem je izrek dokazan. ■

V nadaljnih razdelkih tega poglavja se posvetimo posameznim posebnim primerom konstrukcije podane v 6.1.1.

6.3 Premer 2

V tem razdelku bomo opisali primer, ko ima graf G premer 2. Graf G je v tem primeru povezan krepko regularen graf. Ponavadi presečno število c_2 (to je število skupnih sosedov dveh vozlišč na razdalji 2) povezanega krepko regularnega grafa označimo z μ, presečno število a_1 (to je število skupnih sosedov dveh sosednjih vozlišč) pa z λ. Če je n število vozlišč grafa G in k njegova stopnja, potem pravimo, da so (n,k,λ,μ) *parametri* grafa G. Parametre krepko regularnega grafa povezuje znana formula (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Proposition 1.4.1]):

$$(n-k-1)\mu = (k-\lambda-1)k. \tag{6.2}$$

Če je graf G krepko regularen s parametri (n,k,λ,μ), potem je njegov komplement $\overline{G}$ krepko regularen s parametri $(n, n-k-1, n-2k+\mu-2, n-2k+\lambda)$ (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Theorem 1.3.1]).

Naj bo G povezan krepko regularen graf s parametri (n,k,λ,μ). Potem ima G natanko tri različne lastne vrednosti: k z večkratnostjo 1, r z večkratnostjo f in s z večkratnostjo g. Pri tem je

$$r,s = \frac{\lambda-\mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}{2} \tag{6.3}$$

in

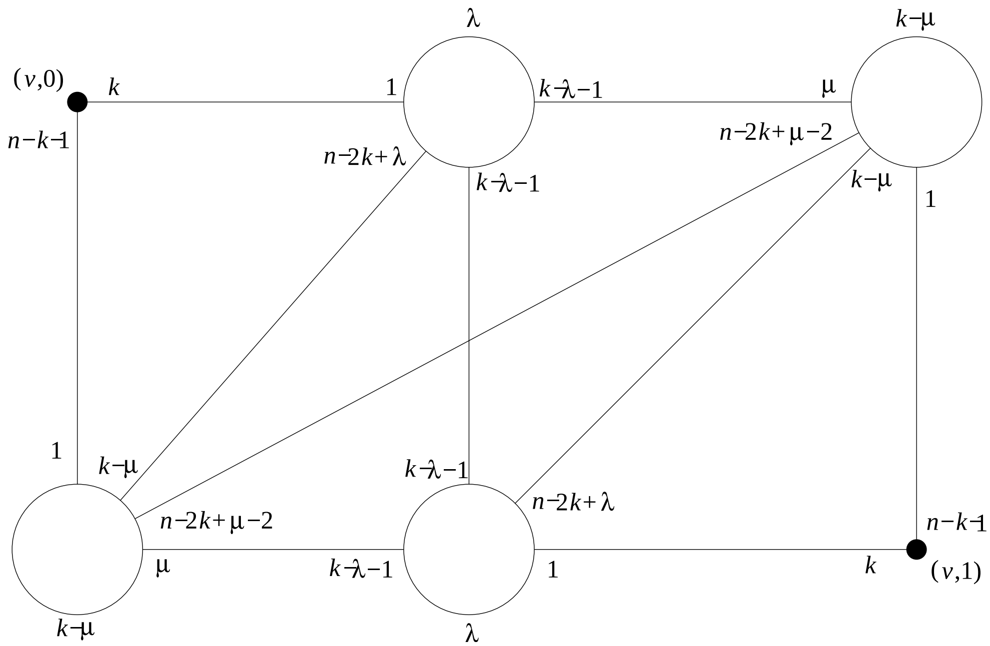
$$f,g = \frac{n-1}{2} \pm \frac{(n-1)(\mu-\lambda)-2k}{2\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}, \tag{6.4}$$

glej van Lint in Wilson [31, Theorem 21.1]. Lastni vrednosti r in s sta celoštevilski, razen v primeru, ko je $f = g = (n-1)/2$ (v tem primeru grafu G pravimo *konferenčni graf*).

Ekvitabilno particijo vozlišč grafa H, podano v lemi 6.1.3, bolj natančno prikažemo na sliki 6.2.

Pokažimo sedaj naslednji izrek, ki nam bo podal potreben in zadosten pogoj, da je graf H razdaljno-regularen.

Izrek 6.3.1 *Naj bo G povezan krepko regularen graf s parametri (n,k,λ,μ) in naj bo H graf dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Potem veljata naslednji trditvi:*



Slika 6.2: Ekvitabilna particija vozlišč grafa H v primeru, ko je premer grafa G enak 2.

(i) *Graf H je antipoden graf indeksa 2 in premera 3.*

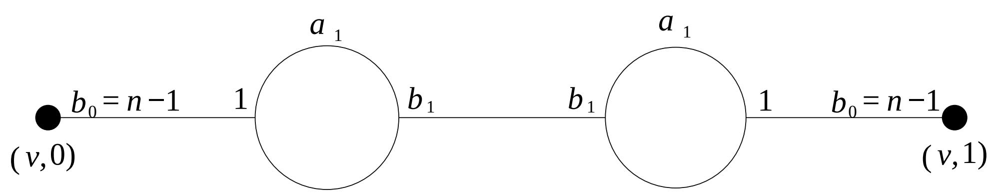
(ii) *Graf H je razdaljno-regularen natanko takrat, ko je*

$$\lambda = \frac{(k-\mu)(k-2\mu-1)}{k-2\mu}.$$

V primeru, ko je H razdaljno-regularen, je $k - 2\mu \neq 0$, presečno število a_1 grafa H pa je enako $n - 2k + 2\lambda$.

DOKAZ. Naj bo (v, i) poljubno vozlišče grafa H.
(i) S slike 6.2 se ni težko prepričati, da je vozlišče $(v, i + 1)$ na razdalji 3 od vozlišča (v, i). Vsa ostala vozlišča grafa H so od (v, i) oddaljena za manj kot 3. To pa seveda pomeni, da je premer grafa H enak 3 in da je graf H antipoden graf indeksa 2.

(ii) Naj bo $(u, j) \in H(v, i)$. Ker ima razdaljna particija grafa H glede na vozlišče (v, i) enake parametre kot razdaljna particija grafa H glede na vozlišče $(v, i+1)$ (glej sliko 6.2), jo lahko predstavimo na sliki 6.3. Graf H je torej razdaljno-regularen natanko takrat, ko obstaja presečno število a_1, saj je v tem primeru $b_1 = b_0 - a_1 - 1$. Torej natanko takrat, ko število sosedov, ki jih ima vozlišce (u, j) v množici $H(v, i)$, ni odvisno od izbire vozlišč (v, i) in (u, j). Če je $i = j$, potem ima vozlišče (u, j) v $H(v, i)$ natanko $\lambda + n - 2k + \lambda = n - 2k + 2\lambda$ sosedov. Če pa je $j = i + 1$, potem ima vozlišče (u, j) v $H(v, i)$ natanko $k - \mu + k - \mu = 2(k - \mu)$ sosedov. Graf H je torej razdaljno-regularen natanko takrat, ko je $a_1 = n - 2k + 2\lambda = 2(k - \mu)$, torej natanko



Slika 6.3: Razdaljna particija vozlišč grafa H v primeru, ko je premer grafa G enak 2.

takrat, ko je

$$n = 2(2k - \lambda - \mu). \tag{6.5}$$

Pokažimo najprej, da je v tem primeru $k - 2\mu \neq 0$. Če bi bilo $k = 2\mu$ in bi bil graf H razdaljno-regularen, potem iz enačbe (6.5) dobimo $n = 2(3\mu - \lambda)$, iz enakosti (6.2) pa $n = 2(3\mu - \lambda) - 1$. To pa je seveda protislovje.
Če pa je $k - 2\mu \neq 0$, potem z upoštevanjem enačbe (6.2) iz (6.5) dobimo

$$\lambda = \frac{(k-\mu)(k-2\mu-1)}{k-2\mu}. \tag{6.6}$$

Izrek je tako dokazan. ∎

Opomba: Antipodnim razdaljno-regularnim grafom premera 3 in indeksa 2 pravimo tudi *Taylorjevi grafi*, glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 1.5].

Posledica 6.3.2 *Naj bo G povezan krepko regularen graf s parametri (n, k, λ, μ), za katerega velja $\lambda = (k-\mu)(k-2\mu-1)/(k-2\mu)$. Naj bosta r in s $(r > s)$ netrivialni lastni vrednosti grafa G. Potem veljajo naslednje trditve:*

(i) *Razdaljno-regularen graf H, dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1, ima presečno tabelo*

$$\{n-1, 2(k-\lambda-1), 1; 1, 2(k-\lambda-1), n-1\}.$$

(ii) *Število $k - 2\mu$ deli števili k in μ.*

(iii) *Naj bo $\theta_1 = k - 2\mu$ in $\theta_2 = (\mu - k)/(k - 2\mu)$. Potem je $\{r, s\} = \{\theta_1, \theta_2\}$.*

(iv) *$n = -2(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_1\theta_2)$, $k = -\theta_1(1 + 2\theta_2)$, $\lambda = -\theta_2(\theta_1 - 1)$ in $\mu = -\theta_1(\theta_2 + 1)$.*

DOKAZ. (i) Stopnja grafa H je enaka $b_0(H) = k_1(G) + k_2(G) = n - 1$. Po izreku 6.3.1 je presečno število $a_1(H)$ enako $n - 2k + 2\lambda$. Torej je $b_1(H) = b_0(H) - a_1(H) - 1 = n - 1 - n + 2k - 2\lambda - 1 = 2(k - \lambda - 1)$. Ker pa je graf H antipoden razdaljno-regularen graf indeksa 2, je $c_2 = b_1$ ter $b_2 = c_1 = 1$.

(ii) Ker je λ celo število, iz enačbe (6.6) dobimo, da $k - 2\mu$ deli število $(k-\mu)(k-2\mu-1)$. Ker pa sta števili $k - 2\mu$ in $k - 2\mu - 1$ tuji, mora $k - 2\mu$ deliti število $k - \mu$. Zato $k - 2\mu$ deli tudi število $k - \mu - (k - 2\mu) = \mu$. Zaradi tega pa mora $k - 2\mu$ deliti tudi število k.

(iii) V formuli (6.3) upoštevamo $\lambda = (k-\mu)(k-2\mu-1)/(k-2\mu)$ in dobimo željeni rezultat.

(iv) Formuli za k in μ dobimo neposredno iz točke (iii), medtem ko formulo za λ dobimo iz enačbe (6.6) in točke (iii). Formulo za n naposled dobimo iz enakosti (6.2). ■

Poglejmo si sedaj nekaj najmanjših primerov krepko regularnih grafov (glede na število vozlišč), katerih parametri ustrezajo pogoju izreka 6.3.1.

1. Petersenov graf je krepko regularen graf s parametri $(10,3,0,1)$. S konstrukcijo 6.1.1 iz njega dobimo razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{9,4,1;1,4,9\}$, torej Johnsonov graf $J(6,3)$ (Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.1]). Isti graf dobimo s konstrukcijo 6.1.1 iz komplementa Petersenovega grafa, torej trikotniškega grafa $T(5)$s parametri $(10,6,3,4)$, ki je izomorfen Johnsonovemu grafu $J(5,2)$.

2. Iz Clebschevega grafa (glej van Lint in Wilson [31, Example 21.4]) s parametri $(16,5,0,2)$, komplementa Shrikhandejevega grafa s parametri $(16,9,\ 4,6)$ (ki ga lahko dobimo kot Cayleyev graf grupe $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ glede na Cayleyevo množico $\{\pm(1,0),\pm(0,1),\pm(1,1)\}$) in iz komplementa Hammingovega grafa $H(2,4)$ s parametri $(16,9,4,6)$ (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 9.2]) dobimo enolično določen razdaljno-regularen graf s presečnimi števili $\{15,8,1;1,8,15\}$.

3. Iz komplementa Clebschevega grafa s parametri $(16,10,6,6)$, Shrikhandejevega grafa s parametri $(16,6,\ 2,2)$ in iz Hammingovega grafa $H(2,4)$ s parametri $(16,6,2,2)$ dobimo enolično določen razdaljno-regularen graf s presečnimi števili $\{15,6,1;1,6,15\}$.

4. Iz bločnega grafa Steinerjevega sistema $S(2,3,13)$ s parametri $(26,10,3,4)$ dobimo razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{25,12,1;1,12,25\}$. Graf z isto presečno tabelo dobimo tudi iz komplementa bločnega grafa Steinerjevega sistema $S(2,3,13)$.

5. Iz trikotniškega grafa $T(8)$ (torej iz Johnsonovega grafa $J(8,2)$) s parametri $(28,12,6,4)$ dobimo razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{27,10,1;1,10,27\}$. Iz komplementa trikotniškega grafa $T(8)$ pa dobimo razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{27,16,1;1,16,27\}$.

6. Iz krepko regularnih grafov s parametri $(36,14,4,6)$ dobimo s konstrukcijo 6.1.1 razdaljno-regularne grafe s presečno tabelo $\{35,18,1;1,18,35\}$. Iz komplementov teh grafov pa dobimo s konstrukcijo 6.1.1 razdaljno-regularne grafe s presečno tabelo $\{35,16,1;1,16,35\}$.

7. Iz krepko regularnega grafa s parametri $(36,15,6,6)$, ki ga lahko dobimo kot Cayleyev graf grupe $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ glede na Cayleyevo množico $\{(i,0),(0,i),(i,i) \mid i \in \mathbb{Z}_6 \backslash \{0\}\}$, dobimo razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{35,16,1;1,16,35\}$.

Iz komplementa tega krepko regularnega grafa pa dobimo razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{35, 18, 1; 1, 18, 35\}$.

Razdelek zaključimo z naslednjimi komentarji. Ni se težko prepričati, da če parametri krepko regularnega grafa G zadoščajo enačbi (6.6), potem tej enačbi zadoščajo tudi parametri komplementa grafa G. Toda, kot pokažejo primeri 2, 3, 5 in 6, iz grafa G in njegovega komplementa v splošnem ne dobimo izomorfnih razdaljno-regularnih grafov. Lahko se namreč prepričamo, da če s konstrukcijo 6.1.1 dobimo iz krepko regularnega grafa G graf H, potem iz komplementa grafa G dobimo drugi razdaljni graf grafa H (to je graf z isto množico vozlišč kot H, v katerem pa sta vozlišči povezani natanko takrat, ko sta v grafu H na razdalji 2).

Po drugi strani pa lahko s konstrukcijo 6.1.1 dobimo izomorfen graf iz neizomorfnih krepko regularnih grafov. Naprimer, komplement Clebschevega grafa in Shrikhande-jev graf sta neizomorfna (saj imata različni stopnji), iz obeh pa dobimo enolično določen razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{15, 6, 1; 1, 6, 15\}$.

6.4 Premer 3

V tem razdelku bomo privzeli, da je premer razdaljno-regularnega grafa G enak 3. Naj bo $\{b_0, b_1, b_2; 1, c_2, c_3\}$ njegova presečna tabela, H pa graf, ki ga iz grafa G dobimo s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Naj bo (v, i) poljubno vozlišče grafa H. Že v lemi 6.1.3 smo pokazali, da je particija vozlišč grafa H, ki je predstavljena na sliki 6.4, ekvitabilna, ter da njeni parametri niso odvisni od izbire vozlišča (v, i).
Pokažimo sedaj naslednjo lemo.

Lema 6.4.1 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera 3, graf H pa dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Če je graf H razdaljno-regularen, potem je presečno število p^3_{33} grafa G enako 0. Graf H je v tem primeru antipoden graf indeksa 2, njegov premer pa je enak 4.*

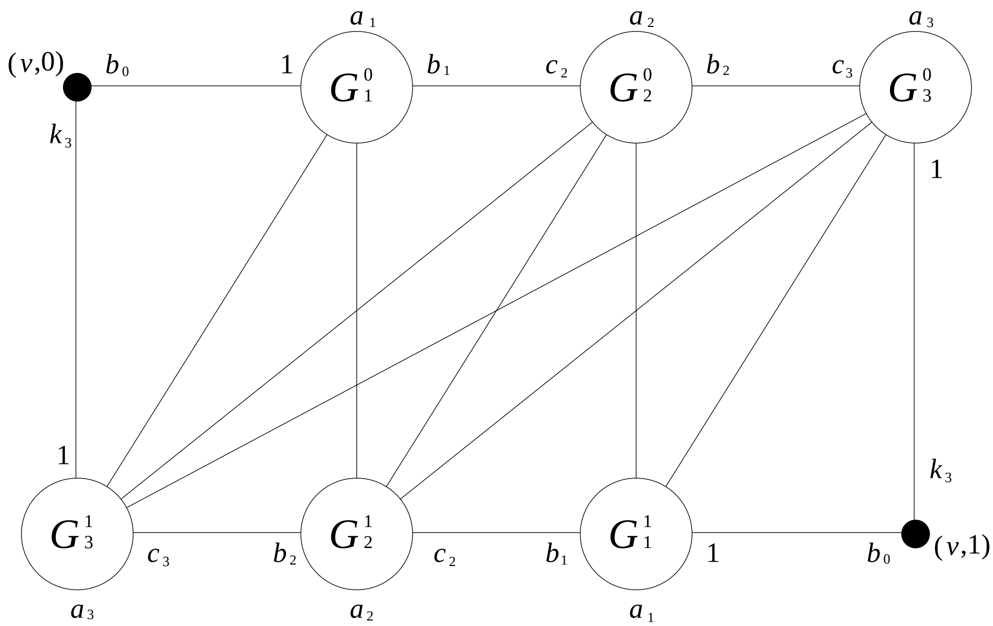
DOKAZ. Predpostavimo, da je $p^3_{33} \neq 0$ in da je graf H razdaljno-regularen ter poskušajmo priti do protislovja. Naj bo v poljubno vozlišče grafa G. Premer grafa H je v tem preimeru enak 3 in

$$H_3(v, 0) = G^1_1(v) \cup \{(v, 1)\},$$

glej sliko 6.4. Torej ima vozlišče $(v, 1)$ natanko b_0 sosedov v $H_3(v, 0)$, vsako drugo vozlišče iz $H_3(v, 0)$ pa ima natanko $a_1 + 1$ sosedov v $H_3(v, 0)$. Ker je $G^1_1(v) \neq \emptyset$, mora torej veljati $b_0 = 1 + a_1$. To pa seveda pomeni $b_1 = 0$, protislovje!

Če pa je $p^3_{33} = 0$, potem se ni težko prepričati (glej sliko 6.4), da je premer grafa H enak 4. Ker pa je vozlišče $(v, i + 1)$ edino vozlišče grafa H, ki je od vozlišča (v, i) oddaljeno za 4, je graf H antipoden indeksa 2. ■

Naslednji izrek sta prva dokazala Martin in Munemasa. V dokazu sta uporabila algebraični pristop. Podali bomo neodvisen dokaz tega izreka, v dokazu pa bomo



Slika 6.4: Ekvitabilna particija vozlišč grafa H v primeru, ko je premer grafa G enak 3. Povezave med množicama G_j^0 in G_ℓ^1 obstajajo natanko takrat, ko je presečno število $p_{3\ell}^j$ grafa G različno od 0. Torej med množicama G_j^0 in G_ℓ^1 ni povezav, če je $j + \ell < 3$.

uporabili kombinatoričen pristop. Izrek bomo namreč dokazali s pomočjo ekvitabilnih particij, ki močno spominjajo na ekvitabilne particije 1-homogenih grafov.

Izrek 6.4.2 (B. Martin in A. Munemasa) *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera 3, s presečnim številom $p_{33}^3 = 0$. Naj bo H graf dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Graf H je razdaljno-regularen natanko takrat, ko za presečna števila grafa G veljata naslednji trditvi:*

(i) $a_1 + \dfrac{a_3 b_1 b_2}{c_2 c_3} = 2a_3,$

(ii) $c_2 + p_{33}^2 = 2b_2.$

DOKAZ. Naj bo v poljubno vozlišče grafa G. Ker je graf H antipoden indeksa 2 in ker je particija njegovih vozlišč podana na sliki 6.4 ekvitabilna, je razdaljno-regularen natanko takrat, ko veljata trditvi:

(i') Število sosedov, ki jih ima vozlišče (u, j) iz množice $H(v, 0)$ v množici $H(v, 0)$, je neodvisno od izbire vozlišč $(v, 0)$ in (u, j).

(ii') Število sosedov, ki jih ima vozlišče (u, j) iz množice $H_2(v, 0)$ v množici $H(v, 0)$, je neodvisno od izbire vozlišč $(v, 0)$ in (u, j).

S slike 6.4 se ni težko prepričati (ker je $p^3_{33} = 0$), da velja

$$H(v,0) = G^0_1(v) \cup G^1_3(v), \quad H_2(v,0) = G^0_2(v) \cup G^1_2(v), \quad H_3(v,0) = G^0_3(v) \cup G^1_1(v)$$

ter $H_4(v,0) = \{(v,1)\}$. Vsako vozlišče $(u,0) \in G^0_1(v)$ ima v $H(v,0)$ natanko

$$a_1 + p^1_{33} = a_1 + \frac{a_3 b_1 b_2}{c_2 c_3}$$

sosedov. Vsako vozlišče $(u,1) \in G^1_3(v)$ pa ima v $H(v,0)$ natanko $a_3 + p^3_{31} = 2a_3$ sosedov. Točka (i') torej velja natanko takrat, ko velja točka (i). Podobno vidimo, da točka (ii') velja natanko takrat, ko velja točka (ii). Izrek je tako dokazan. ■

Oglejmo si sedaj primera, ko je graf G antipoden ali dvodelen.

Lema 6.4.3 *Naj bo G antipoden razdaljno-regularen graf premera 3, graf H pa naj bo dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Potem je H razdaljno-regularen natanko takrat, ko je G izomorfen 3-kocki.*

DOKAZ. Naj bo H razdaljno-regularen graf. Ker mora biti po lemi 6.4.1 presečno število p^3_{33} enako 0, je graf G antipoden indeksa 2. Presečno število a_3 je seveda enako 0, zato po izreku 6.4.2(i) dobimo še $a_1 = 0$. Ker pa je G antipoden indeksa 2, mora biti tudi $a_2 = 0$. Torej je G antipoden dvodelen graf s presečno tabelo $\{b_0, b_0 - 1, 1; 1, b_0 - 1, b_0\}$. Ker pa je za antipodne grafe premera 3 seveda $p^2_{33} = 0$, dobimo iz izreka 6.4.2(ii) še $b_0 = 3$. Graf G je torej 3-kocka.

Obratno, če pa je G izomorfen 3-kocki, je graf H po izreku 6.2.1(i) izomorfen 4-kocki ter je zato razdaljno-regularen. Lema je tako dokazana. ■

Lema 6.4.4 *Naj bo G dvodelen razdaljno-regularen graf premera 3, graf H pa naj bo dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Potem je H razdaljno-regularen natanko takrat, ko za presečna števila grafa G velja*

$$c_2 = \frac{1}{8}(4b_0 - 1 \pm \sqrt{1 + 8b_0}).$$

DOKAZ. Ker je G dvodelen, je presečno število p^3_{33} enako 0, pogoj (i) izreka 6.4.2 pa je prav tako izpolnjen. Torej je graf H razdaljno-regularen natanko takrat, ko je $c_2 + p^2_{33} = 2b_2$. Ker pa je G dvodelen, je $p^2_{33} = k_3 - b_2$. Pogoj (ii) izreka 6.4.2 se torej prevede v

$$4c_2^2 + c_2(1 - 4b_0) + b_0(b_0 - 1) = 0,$$

oziroma

$$c_2 = \frac{1}{8}(4b_0 - 1 \pm \sqrt{1 + 8b_0}).$$

Lema je tako dokazana. ■

Za konec razdelka navedimo nekaj primerov grafov (oziroma njihovih presečnih tabel), za katere je iz njih konstruirani graf H razdaljno-regularen. Če je graf

G primitiven ter ima manj kot 1024 vozlišč (glej Brouwe, Cohen in Neumaier [4, stran 425], potem ima G presečno tabelo $\{12,6,2;1,4,9\}$, ali $\{21,10,3;1,6,15\}$, ali $\{60,45,8;1,12,50\}$, ali $\{69,56,10;1,14,60\}$, ali $\{78,50,9,1,15,60\}$, ali $\{110,81,12;1,18,90\}$, ali $\{119,96,18;1,16,102\}$, ali pa $\{174,110,18;1,30,132\}$. Prvi dve tabeli pripadata Johnsonovemu grafu $J(7,3)$ in polovični 7-kocki (glej razdelek 6.2). Dokaz obstoja grafa s presečno tabelo $\{110,81,12;1,18,90\}$ je podal Soicher v [44], ni pa znano, ali je ta graf s svojo presečno tabelo enolično določen. S konstrukcijo 6.1.1 iz tega grafa dobimo *Meixnerjev graf* s presečno tabelo $\{176,135,24,1;1,24,135,176\}$ (glej Martin in Munemasa [32]). Obstoj ostalih grafov še ni znan. Zanimivo je, da se dajo vse zgoraj naštete presečne tabele parametrizirati z dvema parametroma $p,q \in \mathbb{N}$:

$$\{\frac{(pq+p+q)(q+1)}{2}, \frac{(p+1)(q+2)(q-1)}{2}, \frac{(p+q)q}{4}; 1, \frac{(p+q)(q+2)}{4}, \frac{(p+1)q(q+1)}{2}\}.$$

Grafi, ki jih iz njih dobimo s konstrukcijo 6.1.1 pa so tako imenovani *tesni grafi* premera 4, oziroma člani družine $AT4(p,q,2)$ (glej Jurišić, Koolen in Terwilliger [25] in Jurišić in Koolen [22]).

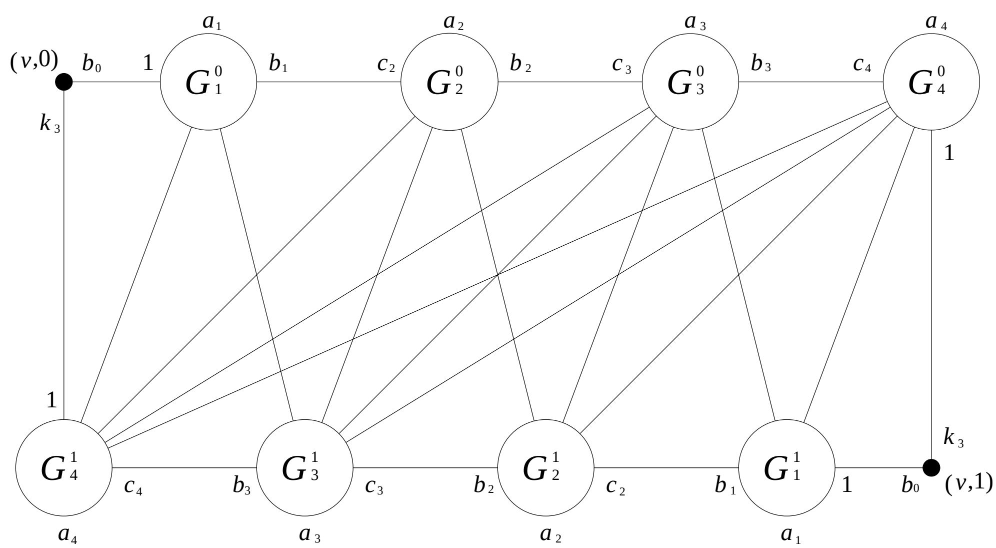
Če je graf G antipoden, potem nam lema 6.4.3 pove, da je graf G izomorfen 3-kocka. S pomočjo konstrukcije 6.1.1 dobimo iz njega 4-kocko.

Če pa je graf G dvodelen, potem lahko njegova presečna števila parametriziramo z enim samim parametrom. Namreč, po lemi 6.4.4 mora biti $\sqrt{1+8b_0}$ celo število. Zato je $b_0 = t(t+1)/2$ za neko naravno število t, $t \geq 2$. Če je t sod, potem je $c_2 = t(t+2)/4$, če pa je t lih, je $c_2 = (t+1)(t-1)/4$. Ker je $b_1 = b_0 - 1$, $b_2 = b_0 - c_2$, $c_1 = 1$ in $c_3 = b_0$, so tudi vsa ostala presečna števila parametrizirana s parametrom t. Za $t = 2$ je graf G izomorfen 3-kocki, iz njega pa s konstrukcijo 6.1.1 dobimo 4-kocko. Za $t = 3$ je graf G izomorfen razdaljno-regularnemu grafu s presečno tabelo $\{6,5,4;1,2,6\}$, to je antipodnemu kvocientu 6-kocke. Iz njega s konstrukcijo 6.1.1 dobimo razdaljno-regularen grafs presečno tabelo $\{16,15,8,1;1,8,15,16\}$, torej Hadamardov graf. Razdaljno-regularen graf z isto presečno tabelo dobimo s konstrukcijo 6.1.1 tudi iz bločnega grafa 2-$(16,10,6)$ načrta, katerega presečno tabelo $\{10,9,4;1,6,10\}$ dobimo za $t = 4$.

6.5 Premer 4

Za konec si oglejmo še primer, ko je premer grafa G enak 4. Naj bo presečna tabela grafa G enaka $\{b_0,b_1,b_2,b_3;1,c_2,c_3,c_4\}$ in naj bo H graf, ki ga dobimo iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Ekvitabilna particija vozlišč grafa H, ki smo jo opisali v lemi 6.1.3, je podana na sliki 6.5.
Najprej pokažimo naslednjo lemo.

Lema 6.5.1 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera 4, graf H pa dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Če je graf H razdaljno-regularen, potem sta presečni števili p^4_{44} in p^3_{44} grafa G enaki* 0*, graf H je antipoden graf indeksa* 2*, njegov premer pa je enak* 5.



Slika 6.5: Graf H v primeru, ko je premer grafa G enak 4. Povezave med množicama G^0_j in G^1_ℓ obstajajo natanko takrat, ko je presečno število $p^j_{4\ell}$ grafa G različno od 0. Torej med množicama G^0_j in G^1_ℓ ni povezav, če je $j+\ell<4$.

Dokaz. Naj bo $v \in VG$. Trditev, da sta presečni števili p^4_{44} in p^3_{44} grafa G enaki 0, bomo dokazali s protislovjem. Dokaz bomo razdelili na tri primere.

Primer 1: $p^4_{44} \neq 0$ in $p^3_{44} \neq 0$. V tem primeru je

$$H_3(v,0) = G^1_2(v) \cup G^1_1(v) \cup \{(v,1)\}.$$

Vozlišče $(v,1)$ ima zato b_0 sosedov v $H_3(v,0)$, poljubno vozlišče iz $G^1_2(v) \neq \emptyset$ pa ima v $H_3(v,0)$ natanko a_2+c_2 sosedov. Če je H razdaljno-regularen, mora torej veljati $b_0 = a_2 + c_2$. Vendar to pomeni $b_2 = 0$, kar pa je seveda pritislovje.

Primer 2: $p^4_{44} \neq 0$ in $p^3_{44} = 0$. Tokrat imamo

$$H_3(v,0) = G^0_3(v) \cup G^1_2(v) \cup G^1_1(v) \cup \{(v,1)\}.$$

Vozlišče $(v,1)$ ima zato b_0 sosedov v $H_3(v,0)$, poljubno vozlišče iz $G^1_1(v) \neq \emptyset$ pa ima $1+a_1+b_1+p^1_{34}$ sosedov v $H_3(v,0)$. Če je H razdaljno-regularen, mora seveda veljati $b_0 = 1+a_1+b_1+p^1_{34}$, to pa seveda pomeni $p^1_{34}=0$. Vendar pa potem iz $p^1_{34} = (k_3 b_3/k)$ sledi $b_3 = 0$, kar pa je seveda protislovje.

Primer 3: $p^4_{44} = 0$ in $p^3_{44} \neq 0$. V tem primeru je

$$H_3(v,0) = G^0_4(v) \cup G^1_2(v) \cup G^1_1(v) \quad \text{in} \quad H_4(v,0) = \{(v,1)\}.$$

Toda sedaj pa poljubno vozlišče iz $G^1_2(v) \neq \emptyset$ nima nobenega soseda v $H_4(v,0)$, torej graf H ne more biti razdaljno-regularen.

Naj bo (v,i) poljubno vozlišče grafa H. S slike 6.2 se ni težko prepričati, da je vozlišče $(v,i+1)$ na razdalji 5 od vozlišča (v,i). Vsa ostala vozlišča grafa H so od

(v, i) oddaljena za manj kot 5. To pa seveda pomeni, da je premer grafa H enak 5, ter da je graf H antipoden graf indeksa 2. Lema je tako dokazana. ■

Naslednji izrek dokažemo na podoben način kot izrek 6.4.2, zato bomo podali samo skico dokaza.

Izrek 6.5.2 *Naj bo G razdaljno-regularen graf premera 4 in s presečnima številoma $p^4_{44} = p^3_{44} = 0$. Naj bo H graf dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Graf H je razdaljno-regularen natanko takrat, ko za presečna števila grafa G veljajo naslednje trditve:*

(i) $a_1 + \dfrac{a_4 b_1 b_2 b_3}{c_2 c_3 c_4} = 2a_4$,

(ii) $c_2 + p^2_{44} = 2b_3$,

(iii) $a_2 + \dfrac{b_2 b_3 (a_4 + a_3 - a_1)}{c_2 c_3} = a_3 + \dfrac{b_3 (a_4 + a_3 - a_1)}{c_2}$.

SKICA DOKAZA. Naj bo (v, i) poljubno vozlišče grafa H. Ker je po lemi 6.5.1 graf H antipoden graf indeksa 2 in ker ima razdaljna particija glede na vozlišče (v, i) enake parametre kot razdaljna particija glede na vozlišče $(v, i + 1)$, je graf H razdaljno-regularen natanko tedaj, ko veljajo naslednje trditve:

(i') število sosedov, ki jih ima vozlišče (u, j) iz množice $H(v, i)$ v množici $H(v, i)$ ni odvisno od izbire vozlišč (v, i) in (u, j),

(ii') število sosedov, ki jih ima vozlišče (u, j) iz množice $H_2(v, i)$ v množici $H(v, i)$ ni odvisno od izbire vozlišč (v, i) in (u, j),

(iii') število sosedov, ki jih ima vozlišče (u, j) iz množice $H_2(v, i)$ v množici $H_2(v, i)$ ni odvisno od izbire vozlišč (v, i) in (u, j).

Ker pa je $H(v, i) = G^0_1(v) \cup G^1_4(v)$ in $H_2(v, i) = G^0_2(v) \cup G^1_3(v)$ se s pomočjo leme 6.1.3 ni težko prepričati, da je točka (i') ekvivalentna točki (i), točka (ii') ekvivalentna točki (ii), ter točka (iii') ekvivalentna točki (iii). ■

Kot v prejšnjem razdelku si tudi tukaj poglejmo primera, ko je graf G antipoden in dvodelen.

Lema 6.5.3 *Naj bo G antipoden razdaljno-regularen graf premera 4, graf H pa naj bo dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Potem je H razdaljno-regularen natanko takrat, ko je G izomorfen 4-kocki.*

DOKAZ. Predpostavimo, da je graf H razdaljno-regularen. Po lemi 6.5.1 je $p^4_{44} = 0$, kar pomeni, da je indeks grafa G enak 2. Ker je G antipoden, je seveda tudi $p^3_{44} = 0$. Presečno število a_4 grafa G je seveda enako 0, zato iz izreka 6.5.2(i) dobimo tudi $a_1 = 0$. Ker pa je G antipoden, mora biti tudi $a_3 = 0$. Toda sedaj pa iz izreka 6.5.2 dobimo še $a_2 = 0$. Torej je presečna tabela grafa G enaka $\{2c_2, 2c_2 - 1, c_2, 1; 1, c_2, 2c_2 - 1, 2c_2\}$, saj je $b_0 = a_2 + b_2 + c_2 = 2c_2$. Ker je graf G antipoden, je seveda tudi presečno število p^2_{44} enako 0. Iz točke (ii) izreka 6.5.2 pa tako naposled dobimo $c_2 = 2$.

Privzemimo sedaj, da je graf G izomorfen 4-kocki. Po izreku 6.2.1(i) je graf H izomorfen 5-kocki in je zato razdaljno-regularen. ∎

Lema 6.5.4 *Naj bo G dvodelen razdaljno-regularen graf premera 4, graf H pa naj bo dobljen iz grafa G s pomočjo konstrukcije 6.1.1. Potem je H razdaljno-regularen natanko takrat, ko za presečna števila grafa G velja*

$$p^4_{44} = 0 \quad \textit{in} \quad c_2 + p^2_{44} = 2b_3.$$

DOKAZ. Ker je G dvodelen, je $p^3_{44} = 0$, edini netrivialen pogoj iz izreka 6.5.2 pa je $c_2 + p^2_{44} = 2b_3$. ∎

Za konec si zopet oglejmo nekaj primerov. Edina primitivna grafa premera 4, ki zadoščata vsem pogojem leme 6.5.1 in izreka 6.5.2 ter imata manj kot 4096 vozlišč, sta Johnsonov graf $J(9,4)$ ter polovična 9-kocka (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, stran 419]). Iz Johnsonovega grafa $J(9,4)$ dobimo s konstrukcijo 6.1.1 Johnsonov graf $J(10,5)$, iz polovične 9-kocke pa polovično 10-kocko (glej razdelek 6.2).

Če je graf G antipoden, potem nam lema 6.5.3 pove, da G izomorfen 4-kocki, graf HG, ki ga iz G dobimo s konstrukcijo 6.1.1, pa je izomorfen 5-kocki.

Če pa je graf G dvodelen, potem med razdaljno-regularnimi grafi z manj kot 4096 vozlišči samo člani neskončne družine s presečnimi števili podanimi z $b_0 = 3\binom{m}{3} + \binom{m-1}{2}$, $c_2 = \binom{m}{2} - 1$ in $c_3 = 3\binom{m}{3}$, kjer je m naravno število večje ali enako 3, zadoščajo obema pogojema leme 6.5.4 (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [5, stran 43]). Za $m = 3$ je dobljeni graf 4-kocka, za $m = 4$ pa dobimo enolično določen razdaljno-regularen graf s presečno tabelo $\{15, 14, 10, 3; 1, 5, 12, 15\}$ (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [4, Section 13.1]). Graf, ki ga iz njega dobimo s pomočjo konstrukcije 6.1.1 pa je dvojni krov Higman-Simsovega grafa, to je graf s presečno tabelo $\{22, 21, 16, 6, 1; 1, 6, 16, 21, 22\}$. Grafi z zgoraj opisano presečno tabelo za $m \geq 5$ zaenkrat še niso znani.

Na podoben način kot smo to storili v razdelkih 6.4 in 6.5, bi lahko raziskovali tudi razdaljno-regularne grafe večjih premerov. Ker pa se število pogojev na presečna števila povečuje, je primerov, razen tistih opisanih v razdelku 6.2, vedno manj.

Dodatek A

Definicije

V tem poglavju bomo definirali nekatere pojme in objekte, ki jih uporabljamo oziroma omenjamo v tej disertaciji. Za podrobnejšo obravnavo le-teh bralcu priporočamo knjigi Diestel [14] ter van Lint in Wilson [31].

Paru $\Gamma(V, E)$, kjer je V končna množica in E neka množica dvoelementnih podmnožic množice V, pravimo *graf.* Množici $V = V\Gamma$ pravimo *množica vozlišč grafa* Γ, množici $E = E\Gamma$ pa *množica povezav grafa* Γ. Če je množica $\{x, y\}$ povezava grafa Γ, potem pravimo, da sta vozlišči x in y *sosednji* oziroma *povezani* v grafu Γ. Če sta poljubni dve vozlišči grafa Γ sosednji, potem graf Γ imenujemo *poln* graf. Graf Γ je *dvodelen*, če obstajata množici V_1 in V_2, za kateri velja $V_1 \cup V_2 = V$ in $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, poljubni dve vozlišči iz V_1 oziroma V_2 pa nista sosednji.

Naj bosta $\Gamma = (V, E)$ in $\Gamma' = (V', E')$ poljubna grafa. Pravimo, da sta grafa Γ in Γ' *izomorfna*, če obstaja taka bijekcija $\varphi : V \to V'$, za katero velja, da je $\{x, y\}$ povezava grafa Γ natanko takrat, ko je $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ povezava grafa Γ'. Preslikavi φ pravimo *izomorfizem* grafov Γ in Γ'. Če je $\Gamma = \Gamma'$, potem preslikavo φ imenujemo *avtomorfizem* grafa Γ. Graf Γ je *tranzitiven po vozliščih*, če za poljubni vozlišči x in y grafa Γ obstaja tak avtomorfizem φ, da je $\varphi(x) = y$.

Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf na n vozliščih. *Matrika sosednosti* grafa Γ je matrika A dimenzije $n \times n$, ki je indeksirana z vozlišči grafa Γ in definirana z

$$(A)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{x, y\} \in E, \\ & \\ 0 & \text{if } \{x, y\} \notin E \end{cases} \qquad (x, y \in V).$$

Število θ je *lastna vrednost* grafa Γ z večkratnostjo m_θ, če je lastna vrednost njegove matrike sosednosti in je njena večkratnost enaka m_θ.

Naj bo $V' \subseteq V$ in $E' \subseteq E$ ter $x, y \in V'$ za vsak $\{x, y\} \in E'$. Graf $\Gamma' = (V', E')$ je *podgraf* grafa $\Gamma = (V, E)$. Če graf Γ' vsebuje vse povezave $\{x, y\} \in E$, za katere je $x, y \in V'$, potem graf Γ' imenujemo *inducirani podgraf* grafa Γ. Pravimo tudi, da je podgraf Γ' *induciran* z množico V'. Podgrafu grafa Γ, ki je izomorfen polnemu grafu, pravimo *klika* grafa Γ.

Komplement grafa $\Gamma = (V, E)$ je graf $\overline{\Gamma} = (\overline{V}, \overline{E})$, kjer je $V = \overline{V}$ in $\{x, y\} \in \overline{E}$ natanko takrat, ko $\{x, y\} \notin E$.

Naj bo $\Gamma = (V, E)$ graf. *Stopnja* vozlišča $x \in V$ je število sosedov vozlišča x. Če imajo vsa vozlišča grafa Γ enako stopnjo k, potem pravimo, da je graf Γ *regularen* s stopnjo k. Regularnim grafom s stopnjo 3 včasih pravimo tudi *kubični grafi*.

Graf $\Gamma' = (V', E')$ je 1-*faktor* grafa $\Gamma = (V, E)$, če je graf Γ' regularen stopnje 1 in je $V = V'$.

Naj bo n poljubno naravno število, $n \geq 2$. Graf $P_n = (V, E)$, kjer je $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ in $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}\}$, se imenuje *pot* dolžine n. Pravimo tudi, da je P_n pot med x_1 in x_n, oziroma, da sta vozlišči x_1 in x_n povezani s potjo. Naj bo sedaj $n \geq 3$. Graf $C_n = (V', E')$, kjer je $V' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ in $E' = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, x_1\}\}$, se imenuje *cikel* dolžine n. *Trikotnik* v grafu Γ je podgraf grafa Γ, ki je izomorfen grafu C_3. *Petkotnik* v grafu Γ je podgraf grafa Γ, ki je izomorfen grafu C_5.

Graf $\Gamma = (V, E)$ je *povezan*, če sta poljubni njegovi vozlišči x in y povezani s potjo, ki je podgraf grafa Γ. *Razdalja* med vozliščema x in y povezanega grafa Γ je dolžina najkrajše poti v grafu Γ, ki povezuje vozlišči x in y. Razdaljo med vozliščema x in y označujemo z $\partial(x, y)$. *Premer* d povezanega grafa $\Gamma = (V, E)$ je definiran z $d = \max\{\partial(x, y) \mid x, y \in V\}$. Naj bo x vozlišče grafa Γ in i poljubno nenegativno celo število. Z $\Gamma_i(x)$ bomo označili množico tistih vozlišč grafa Γ, ki so na razdalji i od vozlišča x. Seveda je $\Gamma_i(x) = \emptyset$ za $i > d$, kjer je d premer grafa Γ. Množico vseh sosedov vozlišča x, torej množico $\Gamma_1(x)$, bomo na kratko označevali z $\Gamma(x)$.

Graf Γ premera d je *razdaljno-tranzitiven*, če za poljubna urejena para (x, y) in (x_1, y_1) vozlišč grafa Γ, za katera velja $\partial(x, y) = \partial(x_1, y_1)$, obstaja tak avtomorfizem φ grafa Γ, za katerega je $\varphi(x) = x_1$ in $\varphi(y) = y_1$.

Naj bo d poljubno naravno število, $d \geq 2$. Naj bo V množica vseh zaporedij dolžine d, ki so sestavljena iz elementov 0 in 1. Graf Γ z množico vozlišč V, v katerem sta dve vozlišči sosednji natanko takrat, ko se ustrezni zaporedji razlikujeta na natanko enem mestu, se imenuje *d-dimenzionalna kocka*, oziroma na kratko *d-kocka*.

Incidenčna struktura je trojica $\boldsymbol{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \boldsymbol{I})$, kjer je

(i) $\mathcal{P}$ množica, katere elementi se imenujejo *točke*,

(ii) $\mathcal{B}$ množica, katere elementi se imenujejo *bloki*,

(iii) $\boldsymbol{I}$ *incidenčna relacija* med $\mathcal{P}$ in $\mathcal{B}$, torej $\boldsymbol{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$.

Steinerjev sistem $S(t, k, v)$ je incidenčna struktura $\boldsymbol{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \boldsymbol{I})$, za katero velja

(i) $|\mathcal{P}| = v$,

(ii) $|B| = k$ za vsak $B \in \mathcal{B}$,

(iii) za vsako množico $T \subseteq \mathcal{P}$, za katero je $|T| = t$, obstaja natanko en blok B, za katerega je $(x, B) \in \boldsymbol{I}$ za vsak $x \in T$.

Naj bo $\boldsymbol{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \boldsymbol{I})$ Steinerjev sistem $S(t,k,v)$. *Bločni graf* Steinerjevega sistema $S(t,k,v)$ je graf, katerega množica vozlišč je $\mathcal{B}$, dve vozlišči pa sta povezani natanko takrat, ko je presek ustreznih blokov neprazen.

Literatura

[1] E. Bannai in T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin/Cummings, London (1984).

[2] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press (1974).

[3] R. C. Bose in K. R. Nair, Partially balanced incomplete block designs, *Sankhya* **4** (1939), 337–372.

[4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen in A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1989).

[5] A. E. Brouwer, A. M. Cohen in A. Neumaier, Additions and corrections to the book *Distance-Regular Graphs*, `http://www.win.tue.nl/ aeb/drg/`.

[6] A. E. Brouwer, C. D. Godsil, J. H. Koolen in W. J. Martin, Width and dual width of subsets in polynomial association schemes, *J. Combin. Theory Ser. A* **102** (2003), 255–271.

[7] P. J. Cameron, J. M. Goethals in J. J. Seidel, Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents, *J. Algebra* **55** (1978), 257–280.

[8] J. S. Caughman, Spectra of bipartite P- and Q-polynomial association schemes, *Graphs Combin.* **14** (1998), 321-343.

[9] J. S. Caughman, The last subconstituent of a bipartite Q-polynomial distance-regular graph, *European J. Combin.* **24** (2003), 459–470.

[10] Y. Q. Chen and C. H. Li, Relative difference sets and distance-regular Cayley graphs, poslano v objavo.

[11] B. Curtin, 2-homogeneous bipartite distance-regular graphs, *Discrete Math.* **187** (1998), 39–70.

[12] B. Curtin, Almost 2-homogeneous bipartite distance-regular graphs, *European J. Combin.* **21** (2000), 865–876.

[13] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips research reports supplements No. 10 (1973).

[14] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York (1997).

[15] D. A. Drake, Partial λ-geometries and generalized Hadamard matrices over groups, *Canad. J. Math.* **31** (1979), 617–627.

[16] W. Feit in G. Higman, The non-existence of certain generalized polygons, *J. Algebra* **1** (1964), 114–131.

[17] C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, New York, London (1993).

[18] C. D. Godsil in A. D. Hensel, Distance regular covers of the complete graph, *J. Combin. Theory Ser. B* **56** (1992), 205–238.

[19] A. Hedayat in W. D. Wallis, Hadamard matrices and their applications, *Ann. Statist.* **6** (1978), 1184–1238.

[20] A. A. Ivanov in S. V. Shpectorov, Characterization of the association schemes of Hermitian forms over GF(2^2), *Geom. Dedicata* **30** (1989), 23–33.

[21] A. Jurišić in J. Koolen, A local approach to 1-homogeneous graphs, *Des. Codes Cryptogr.* **21** (2000), 127–147.

[22] A. Jurišić in J. Koolen, Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4, *Discrete Math.* **244** (2002), 181–202.

[23] A. Jurišić, J. Koolen in Š. Miklavič, Triangle- and pentagon-free distance-regular graphs with an eigenvalue multiplicity equal to the valency, v pripravi.

[24] A. Jurišić, J. Koolen in Š. Miklavič, On triangle-free distance-regular graphs with an eigenvalue multiplicity equal to the valency, v pripravi.

[25] A. Jurišić, J. Koolen in P. Terwilliger, Tight distance-regular graphs, *J. Algebraic Combin.* **12** (2000), 163-197.

[26] A. Jurišić in Š. Miklavič, Asociativne sheme, *Obzornik za matematiko in fiziko* **50** (2003), 65–81.

[27] A. Jurišić in Š. Miklavič, Ekvitabilne particije, v pripravi.

[28] M. Lang in P. Terwilliger, Almost-bipartite distance-regular graphs with the Q-polynomial property, v pripravi.

[29] D. A. Leonard, Metric, co-metric association schemes, *Combinatorics, graph theory and computing, Proc. 15th Southeast. Conf., La. State Univ.* (1984), 277–282.

[30] H. A. Lewis, Homotopy in Q-polynomial distance-regular graphs, *Discrete Math.* **223** (2000), 189–206.

[31] J. H. van Lint in R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge university press (1992).

[32] W. Martin in A. Munemasa, Distance-regular graphs related to Mathieu group M_{22}, preprint.

[33] A. Meyerowitz, Cycle-balanced conditions for distance-regular graphs, *Discrete Math.* **264** (2003), 149–165.

[34] Š. Miklavič, Razdaljno-regularni grafi majhnega premera, magistrsko delo (2002).

[35] Š. Miklavič, Q-polynomial distance-regular graphs with $a_1 = 0$, sprejeto v *European J. Combin.*

[36] Š. Miklavič, An equitable partition for a distance-regular graph of negative type, poslano v *J. Combin. Theory Ser. B.*

[37] Š. Miklavič, On bipartite Q-polynomial distance-regular graphs with $c_2 = 1$, poslano v *Discrete Math.*

[38] K. Nomura, Homogenesus graphs and regular near polygons, *J. Combin. Theory Ser. B* **60** (1994), 63–71.

[39] K. Nomura, Spin models constructed from Hadamard matrices, *J. Combin. Theory Ser. A* **68** (1994), 251–261.

[40] K. Nomura, Spin models on bipartite distance-regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 300–313.

[41] L. L. Scott, A condition on Higman's parameters, *Notices Amer. Math. Soc.* **20** (1973), A-97.

[42] D. H. Smith, Primitive and imprimitive graphs, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **22** (1971), 551–557.

[43] J. H. Smith, Symmetry and multiple eigenvalues of graphs, *Glasnik Matematicki* **12** (1977), 3–8.

[44] L. H. Soicher, Yet another distance-regular graph related to a Golay code, *Electron. J. Combin.* **2** (1995).

[45] P. Terwilliger, A new inequality for distance-regular graphs, *Discrete Math.* **137** (1995), 319–332.

[46] P. Terwilliger, Kite-free distance-regular graphs, *European J. Combin.* **16** (1995), 405–414.

[47] P. Terwilliger, Eigenvalue multiplicities of highly symmetric graphs, *Discrete Math.* **41** (1982), 295–302.

[48] C. Weng, Classical distance-regular graphs of negative type, *J. Combin. Theory Ser. B* **76** (1999), 93–116.

[49] C. Weng, Kite-free P- and Q-polynomial schemes, *Graphs Combin.* **11** (1995), 201–207.

[50] C. Weng, Weak-geodetically closed subgraphs in distance-regular graphs, *Graphs Combin.* **14** (1998), 275–304.

[51] N. Yamazaki, Bipartite distance-regular graphs with an eigenvalue of multiplicity k, *J. Combin. Theory Ser. B* **66** (1996), 34–37.