Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Matematika – uporabna smer (UNI)

Matjaž Urlep

# RAZDALJNO-REGULARNI GRAFI IN POSPLOŠENI ČETVEROKOTNIKI

Diplomsko delo

Ljubljana, 2005

*Rad bi se zahvalil svojemu mentorju, Aleksandru Jurišiću, za vse uporabne nasvete in za pomoč, ki mi jo je nudil pri pisanju tega diplomskega dela. Prav tako bi se zahvalil Arjani Žitnik in Štefku Miklaviču, ki sta me opozorila na marsikakšno nedoslednost v mojem pisanju.*

# Kazalo

# Slike

# Program diplomskega dela

Delo naj predstavi matematične osnove, ki so potrebne za razumevanje klasifikacije razdaljno-regularnih grafov in študijo posplošenih četverokotnikov. Slednje je vpeljal Tits, kot poseben primer posplošenih $n$-kotnikov, za katere sta Feit in Higman pokazala, da v končnem netrivialnem primeru obstajajo samo kadar je

$$n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

(posplošeni trikotniki so ravno projektivne ravnine). Razdaljno-regularni grafi so tesno povezani tako z ortogonalnimi polinomi, kakor tudi s klasifikacijo enostavnih končnih grup. Glavni cilji so:

- problem o celoštevilskih rešitvah eliptične krivulje $y^2 = 4w^3 + (w+1)^2$ in razdaljno-regularnih antipodnih krovih točkovnega grafa posplošenega četverokotnika $GQ(w, w^2)$, $w \in \mathbb{N}$,
- primer konstrukcije neskončne družine posplošenih četverokotnikov in neskončne družine razdaljno-regularnih grafov,
- kratek uvod v študijo tesnih grafov.


A. Jurišić, *AT4 Family and 2-homogeneous Graphs*, Discrete Math. **264**, no. 1–3 (2003), 127–148.

C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, New York (1993).

A. Jurišić, *Antipodal Covers*, Ph.D. Thesis, University of Waterloo (1995).

J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge (2001).


Ljubljana, 7. september 2005

Aleksandar Jurišić

# Povzetek

V diplomskem delu bomo rešili problem o celoštevilskih točkah eliptične krivulje $y^2 = 4w^3 + (w+1)^2$ in razdaljno-regularnih krovih točkovnega grafa posplošenega četverokotnika $GQ(w, w^2)$. Za boljše razumevanje problema najprej spoznamo algebraično kombinatoriko, ki stoji za končnimi geometrijami. Najprej uvedemo delne geometrije in spoznamo njihove osnovne lastnosti. Nato podrobneje obdelamo posplošene četverokotnike. Nato s pomočjo točkovnih grafov preidemo na krepko-regularne grafe. Tudi tu pokažemo marsikakšno njihovo lastnost, za kar pa si pomagamo tudi z linearno algebro in lastnimi vrednostmi. Omenimo tudi delitev na primitivne in neprimitivne krepko-regularne grafe. Nato uvedemo razdaljno-regularne grafe kot posplošitev krepko-regularnih grafov. Tudi tukaj povemo kako jih lahko delimo na primitivne in neprimitivne grafe. Pokažemo tudi, da jih lahko definiramo tako s pomočjo ekvitabilnih particij kot s pomočjo razdaljnih matrik. Nato uvedemo antipodne grafe ter njihove krove in kvociente. Definiramo tudi tesne grafe in določimo lastne vrednosti njihovih lokalnih grafov. Ko spoznamo vso potrebno teorijo, se lotimo danega problema in ga rešimo s pomočjo Cardanovih formul za ničle kubične enačbe.

**Math. Subj. Class.** (2000):

`05E30, 51E12, 51E14`

**Ključne besede:**

krepko-regularni grafi, razdaljno-regularni grafi, antipodni krovi, Kreinovi parametri, tesni grafi, delne geometrije, posplošeni četverokotniki

**Keywords:**

strongly regular graphs, distance-regular graphs, antipodal covers, Krein parameters, tight graphs, partial geometries, generalized quadrangles

# Poglavje 1

# Uvod

Da bomo spoznali kako sta povezana problema o celoštevilskih točkah eliptične krivulje $y^2 = 4w^3 + (w+1)^2$ in problem o razdaljno-regularnih antipodnih krovih točkovnega grafa posplošenega četverokotnika $GQ(w, w^2)$, za $w \in \mathbb{N}$, si bomo morali ogledati precej različnih tem. Najprej bomo govorili o končnih geometrijah, kjer bomo uvedli delne geometrije in posplošene četverokotnike. Pokazali bomo precej njihovih lastnosti in si pogledali kako lahko konstruiramo eno od neskončnih družin posplošenih četverokotnikov. Nato bomo na delne geometrije pogledali kot na grafe, kjer si bomo pomagali s točkovnim grafom. Dobili bomo krepko-regularne grafe, ki pa jih bomo definirali še bolj splošno, kot kombinatorne objekte. Seveda bomo pokazali, kako se kombinatorna definicija krepko-regularnih grafov ujema z geometrijsko definicijo delnih geometrij. Pokazali bomo tudi, kako lahko s pomočjo krepko-regularnih grafov rešimo problem prijateljev. Ta pravi, da če ima v skupini vsak par oseb natanko enega skupnega prijatelja, potem obstaja oseba, ki je prijatelj z vsemi osebami v skupini. Tako bomo videli, da krepko-regularni grafi niso povezani le s končnimi geometrijami, ampak jih lahko koristno uporabimo tudi na drugih področjih. Nato bomo pogledali kako lahko krepko-regularne grafe posplošimo. Dobili bomo razdaljno-regularne grafe, ki jih bomo najprej definirali povsem kombinatorno. Nato bomo pokazali, kako jih lahko definiramo tudi s pomočjo ekvitabilnih particij ali pa razdaljnih matrik. Tako bomo že povsem blizu našemo osnovnemu problemu. Prej bomo morali uvesti le še antipodne in tesne grafe. Na poti do sem bomo omenili tudi področja, ki so si poleg delnih geometrij še sorodna z razdaljno-regularnimi grafi. To so npr. asociativne sheme, načrti, mreže in kode. Zanimivo je, da bomo pri iskanju antipodnih krovov naleteli na eliptične krivulje. Žal pa nam pri iskanju celoštevilskih točk na krivulji do sedaj pokazana teorija ne bo pomagala. Izkaže se celo, da tudi v tabelah naše eliptičnih krivulj ne najdemo.

V drugem poglavju se bomo najprej posvetili delnim geometrijam na splošno. Spoznali bomo nekaj njihovih lastnosti. En ekstremni primer končnih geometrij so projektivne ravnine, drugi primer pa so posplošeni četverokotniki, ki nas bodo, kot posebni primeri delnih geometrij, še posebaj zanimali. Na koncu bomo navedli tudi nekaj neskončnih družin posplošenih četverokotnikov.

V tretjem poglavju bomo pobližje spoznali krepko-regularne grafe. Najprej jih bomo definirali kot kombinatorne objekte, oziroma grafe, ki imajo posebne lastnosti. Nato bomo vpeljali močna orodja linearne algebre, s pomočjo katerih bomo lahko pokazali marsikatero njihovo lastnost. Le-te nam bodo med drugim omogočale preverjati ali izbrani parametri res ustrezajo kakšnemu krepko-regularnemu grafu ali ne. Navedli bomo tudi delitev na primitivne in neprimitivne krepko-regularne grafe in podali klasifikacijo slednjih. V tem poglavju bomo spoznali tudi kako lahko prevedemo delne geometrije na krepko-regularne grafe in kdaj lahko krepko-reglaren graf zapišemo kot delno geometrijo.

V četrtem poglavju si bomo pogledali razdaljno-regularne grafe, ki so posplošitev krepko-regularnih grafov z diametrom dva, na splošen diameter $d$. Tudi te bomo najprej definirali v jeziku kombinatorike, nato pa bomo spoznali, kako jih lahko definiramo tako s pomočjo ekvitabilnih particij kot tudi s pomočjo razdaljnih matrik. Spoznali bomo tudi asociativne sheme in njihovo povezavo z razdaljnimi matrikami razdaljno-regularnih grafov. Razdaljno-regularne grafe lahko ponovno delimo na primitivne in neprimitvine in tudi tokrat bomo podali klasifikacijo neprimitivnih grafov. Nato bomo govorili o parametrih in njihovih zvezah, ki nam omogočajo izločanje nekaterih presečnih zaporedij kot nedopustnih za razdaljno-regularne grafe. Tudi tokrat bomo govorili o lastnih vrednostih. Nazadnje bomo spoznali še zaporedje kosinusov in našteli nekaj neskončnih družin razdaljno-regularnih grafov.

V petem poglavju bomo spoznali antipodne razdaljno-regularne grafe. Nekaj bomo povedali o antipodnih krovih, nato pa bomo uvedli tesne grafe in povedali kakšne so lastne vrednosti njihovih lokalnih grafov. V tem poglavju bomo obdelali tudi problem o celoštevilskih točkah eliptične krivulje $y^2 = 4w^3 + (w+1)^2$. Pokazali bomo, da točkovni graf posplošenega četverokotnika $GQ(w, w^2)$ nima razdaljno-regularnega antipodnega krova za noben $w \in \mathbb{N}$.

# Poglavje 2

# Delne geometrije

V prvem razdelku bomo spoznali osnovno definicijo delnih geometrij, ki jih je prvi vpeljal Bose leta 1963 (glej [5]) in pokazal, da obstajajo povezave med njimi in mnogimi drugimi področji kot so načrti, mreže, asociativne sheme, posplošeni četverokotniki in krepko-regularni grafi. Študijo delnih geometrij lahko grobo razdelimo na dva dela. V eno skupino lahko štejemo iskanje kombinatoričnih lastnosti, v drugo pa iskanje povezav s projektivnimi geometrijami. V drugem razdelku se bomo posvetili predvsem prvemu pristopu, s katerim sta se polega Bosea veliko ukvarjala tudi Thas in Payne (glej [19] in [21]). Posplošene četverokotnike bomo bolje spoznali v tretjem razdelku, medtem ko bomo krepko-regularnim grafom posvetili posebno poglavje, saj gre za poglobljen pristop, ki na to področje pripelje teorijo grafov in linearno algebro.

Pojem posplošeni četverokotniki je prvi vpeljal Tits leta 1959 (glej [1]) kot poseben primer posplošenih poligonov, ki jih je preučeval v povezavi z nekaterimi problemi v teoriji grup. Kot smo že omenili je iz povsem drugega področja do njih prišel Bose leta 1963, ko se je ukvarjal s statistiko in z delnimi geometrijami. Na njih lahko gledamo tudi kot na polarne prostore ranga 2, s katerimi so se veliko ukvarjali Thas, Payne in Tallini. Posredno bomo z njimi v zadnjem razdelku prišli do neskončne družine posplošenih četverokotnikov. Celotne klasifikacije posplošenih četverokotnikov nimamo. Obstajajo pa knjige kot sta [7] in [20], ki se ukvarjajo s tem problemom in v katerih najdemo znane družine posplošenih četverokotnikov.

## 2.1 Definicije in primeri

Prostoru $S$ točk $P$ in premic $L$ rečemo, da je **skoraj linearen**, če na vsaki premici $\ell \in L$ ležita vsaj dve točki in če gre skozi točki $p, q \in P$ največ ena premica. Če v skoraj linearnem prostoru $S$ ležita poljubni točki $p$ in $q$ na neki premici $\ell$, rečemo, da je $S$ **linearen prostor**. Za točke, ki ležijo na isti premici, bomo rekli, da so **sosednje** ali **kolinearne**. Prav tako definiramo **sosednje premice** kot tiste, ki imajo skupno točko.

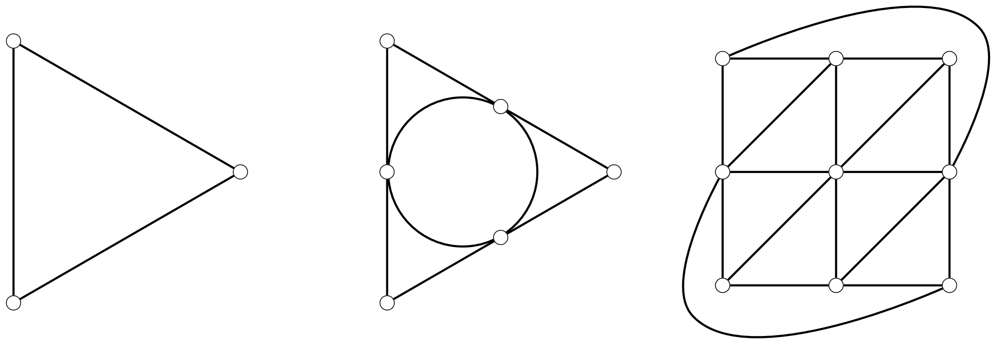
Naj bodo $s$, $t$ in $\alpha$ naravna števila. **Delna geometrija** $pg(s, t, \alpha)$ je skoraj linearen prostor $S = (P, L)$ točk in premic z naslednjimi lastnostmi:

(i) na vsaki premici leži $s + 1$ točk in vsaka točka leži na $t + 1$ premicah,

(ii) dve različni točki ležita na največ eni skupni premici in

(iii) če točka $p$ ne leži na premici $\ell$, potem gre skozi točko $p$ natanko $\alpha$ premic, ki sekajo premico $\ell$.

Za ilustracijo zgornje definicije si poglejmo nekaj primerov manjših delnih geometrij. Na premice bomo gledali kot na podmnožice množice $P$ in jih bomo na slikah označevali z ravnimi črtami ali s krožnimi loki.



Slika 2.1: Delne geometrije $pg(1, 1, 2)$, $pg(2, 1, 2)$ in $pg(2, 2, 2)$.

Če zamenjamo vlogo točk in premic v delni geometriji $pg(s, t, \alpha)$, dobimo **dualno delno geometrijo**. Ker vsaka točka postane premica in obratno, se parametra $s$ in $t$ le zamenjata med sabo. Tretji pogoj v definiciji pa je dualen sam sebi, tako dobimo delno geometrijo $pg(t, s, \alpha)$. Primer delne geometrije in njenega duala je prikazan na sliki 2.2.

## 2.2 Osnovne lastnosti

Poglejmo si koliko točk in koliko premic ima delna geometrija $pg(s,t,\alpha)$.

**Lema 2.2.1** *V delni geometriji $pg(s,t,\alpha)$ imamo*

$$(s+1)(st+\alpha)/\alpha \quad \textit{točk}$$

*in*

$$(t+1)(st+\alpha)/\alpha \quad \textit{premic.}$$

**Dokaz.** Označimo število točk z $n$ in število premic z $m$. Izberimo si premico $\ell$. Potem imamo $n-(s+1)$ točk, ki ne ležijo na $\ell$. Vsaka od njih leži na $\alpha$ premicah, ki sekajo $\ell$. Torej lahko število točk, ki ne ležijo na $\ell$, preštejemo tudi tako, da preštejemo število točk, ki ležijo na premicah, ki sekajo $\ell$, in to število delimo z $\alpha$. Takih premic je $(s+1)t$ in na vsaki leži $s$ točk, ki ne ležijo hkrati na $\ell$. Torej imamo $n-(s+1)=(s+1)st/\alpha$, od koder res dobimo $n=(s+1)(st+\alpha)/\alpha$.

Povedali smo že, da je dual delne geometrije spet delna geometrija. Ker se v dualu vloga premic in točk zamenja, lahko uporabimo prejšnji rezultat v dualni delni geometriji $pg(t,s,\alpha)$ in dobimo $m=(t+1)(st+\alpha)/\alpha$. $\square$

Naslednja trditev je enostavna posledica leme 2.2.1.

**Trditev 2.2.2** *Naj bo $pg(s,t,\alpha)$ delna geometrija. Potem $\alpha \mid st(s+1)$ in dualno tudi $\alpha \mid st(t+1)$.* $\square$

Iz definicije delne geometrije je razvidno, da mora veljati $1 \leq \alpha \leq s+1$ in $1 \leq \alpha \leq t+1$. Na podlagi teh neenakosti delimo delne geometrije na štiri poddružine.

(i) Delne geometrije, kjer je $\alpha = s+1$ ali dualno $\alpha = t+1$. Če je $\alpha = s+1$, pravimo, da je delna geometrija $S$ **linearen prostor** in velja $t \geq s$. Primeri takih delnih geometrij so projektivni in afini prostori. Za njihovo defincijo glej [1].

(ii) Delne geometrije, kjer je $\alpha = s$ ali dualno $\alpha = t$. V primeru $\alpha = t$ gre skozi vsako točko $p$, ki ne leži na premici $\ell$, natanko ena premica, ki ne seka $\ell$. Torej je relacija "vzporeden" na množici premic ekvivalenčna in taki delni geometriji rečemo **mreža**.

(iii) Delne geometrije, kjer je $\alpha = 1$. V tem primeru gre skozi vsako točko $p$, ki ne leži na premici $\ell$, natanko ena premica, ki seka $\ell$. Torej v delni geometriji $S$ nimamo nobenih trikotnikov. Takšne delne geometrije so netrivialni primeri **posplošenih četverokotnikov** in jih bomo natančneje obravnavali v razdelku 2.3.

(iv) Ostanejo nam še delne geometrije, pri katerih je $1 < \alpha < \min(s, t)$. Zanje rečemo, da so **prave delne geometrije**.

## 2.3 Posplošeni četverokotniki

Povedali smo že, da so posplošeni četverokotniki poseben primer delnih geometrij, ko je $\alpha = 1$. A posplošene četverokotnike lahko definiramo tudi malo bolj splošno. **Posplošeni četverokotnik** je skoraj linearen prostor $S = (P, L)$ točk in premic, ki zadošča:

(i) za vsako premico $\ell \in L$ in točko $p \in P$, ki ne leži na njej, obstaja natanko ena premica $k$, ki gre skozi $p$ in seka $\ell$.

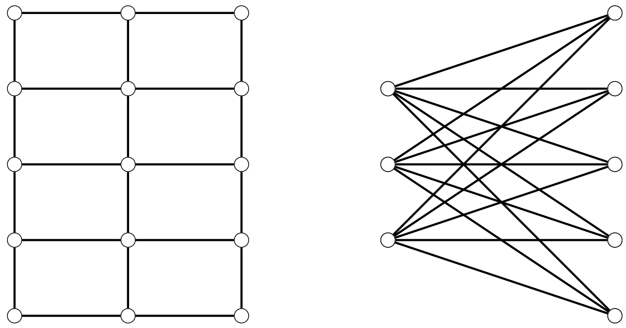
(ii) Obstajajo nekolinearne točke in ne obstaja točka, ki bi ležala na vseh premicah.

(iii) Množica točk $P$ je končna.

Posplošeni četverokotniki so dobili svoje ime zato, ker iz točke (i) sledi, da v njih nimamo trikotnikov. Najenostavnejši primeri so kar mreže, kjer vsaka točka leži na natanko dveh premicah. Tako kot pri delnih geometrijah lahko tudi pri posplošenih četverokotnikih govorimo o dualnih prostorih, ki so zopet posplošeni četverokotniki.

**Trditev 2.3.1** *Naj bo $S = (P, L)$ posplošen četverokotnik. Potem velja vsaj ena od naslednjih trditev:*

*(i) $S$ je **mreža**. Torej vsaka točka leži na natanko dveh premicah, množico premic $L$ pa lahko razdelimo na taki podmnožici $L_1$ in $L_2$, da vsaka premica iz $L_1$ seka vsako premico iz $L_2$, medtem ko se premice znotraj vsake od podmnožic*



Slika 2.2: Primer mreže in njenega duala.

*ne sekajo. Velja tudi, da na vsaki premici iz podmnožice $L_i$ leži natanko $s_i$ točk.*

*(ii) $S$ je dual mreže.*

*(iii) Obstajata taki naravni števili $s$ in $t$, da na vsaki premici leži $s+1$ točk in vsaka točka leži na $t+1$ premicah.*

**Opomba.** Četverokotniki v točki (iii) se ujemajo z delnimi geometrijami, ki imajo parameter $\alpha = 1$.

**Dokaz.** Iz prvih dveh točk v definiciji posplošenih četverokotnikov sledi, da mora vsaka točka ležati na vsaj dveh premicah. Pokazali bomo, da gre skozi poljubni nesosednji točki enako število premic. Naj točka $p$ leži na $t+1$ premicah in naj bo točka $q$ nesosednja $p$. Iz točke (i) v definiciji sledi, da $q$ leži na vsaj $t+1$ premicah. Podobno, če bi $q$ ležala na več kot $t+1$ premicah, bi morala po točki (i) tudi $p$ ležati na več kot $t+1$ premicah, kar pa je v protislovju z začetno predpostavko.

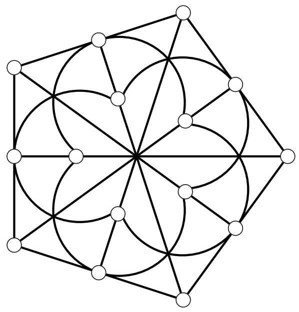
Naj bosta sedaj $p$ in $q$ sosednji točki. Po točki (ii) velja, da obstaja točka $r \in P$, ki ni sosednja točki $p$. Točka $r$ tako leži na $t+1$ premicah. Če točki $r$ in $q$ nista sosednji, leži tudi $q$ na $t+1$ premicah in smo končali. Naj bosta torej $r$ in $q$ sosednji točki. Predpostavimo, da so vse točke, ki so sosednje $r$, sosednje tudi točki $p$. Potem vsebuje vsaka premica skozi $r$ natanko dve točki. Označimo točke, ki so sosednje $r$, z $x_1, \ldots, x_n$. Za točko $x$, ki ni sosednja $r$ po točki (i) velja, da je sosednja točkam $x_i$, za vsak $i = 1, \ldots, n$. Recimo, da takšna točka $x$ leži na premici z več kot dvema točkama. Označimo z $y$ tisto točko na tej premici, ki ni ne $x$, ne $x_i$.

Torej $y$ ni sosednja $r$ in je zato sosednja $x_i$, za $i = 1, \ldots, n$, kar pa je v protislovju s točko (i) v definiciji. Torej mora biti $S$ dualna mreža.

Če obstaja točka $x$, ki je sosednja točki $r$, a ni sosednja s $p$, potem $x$ leži na $t + 1$ premicah. Ker je $r$ sosednja $q$, $x$ ni sosednja $q$ in zato tudi $q$ leži na $t + 1$ premicah. Torej vse točke ležijo na $t + 1$ premicah. Dual te ugotovitve nam pove, da je $S$ ali mreža ali pa na vsaki premici leži $s + 1$ točk. $\square$

Delne geometrije $pg(s, t, 1)$ lahko krajše zapišemo kot posplošene četverokotnike $GQ(s, t)$. Ker so vse točke v definiciji sebi dualne, je dual posplošenega četverokotnika $GQ(s, t)$ ponovno posplošen četverokotnik $GQ(t, s)$. Kandidat za najmanjši netrivialen primer posplošenega četverokotnika je $GQ(2, 2)$. Seveda moramo preveriti ali takšna geometrija res obstaja.

Že pri delnih geometrijah smo prešteli koliko točk in koliko premic imajo. V primeru posplošenih četverokotnikov je $\alpha = 1$, torej imamo $(s + 1)(st + 1)$ točk in $(t + 1)(st + 1)$ premic. V primeru $GQ(2, 2)$ torej rabimo petnajst točk in petnajst premic.



Slika 2.3: Posplošeni četverokotnik $GQ(2, 2)$.

Zlahka se prepričamo, da slika 2.3, kjer smo premice označili z ravnimi črtami in krožnimi loki, res ustreza pogojem v definiciji. Izkaže se, da je to tudi edini primer posplošenega četverokotnika na petnajstih točkah in petnajstih premicah (glej [1, str. 115]). Dokaz enoličnosti je precej zahteven že za tako majhen primer, tako da za malo večje primere zahtevnost hitro preseže naše trenutno znanje. Poglejmo si sedaj še nekaj rezultatov, ki veljajo za posplošene četverokotnike.

**Lema 2.3.2** *Naj bosta $p$ in $q$ dve nesosednji točki. Potem obstaja natanko $t+1$ točk, ki so sosednje tako s $p$ kot s $q$.*

**Dokaz.** Skozi točko $p$ gre $t+1$ premic. Po definiciji obstaja na vsaki od teh premic točka $x_i$, ki je sosednja s $q$. Prav tako po definiciji točke $x_i$ ne morejo sovpadati, ker bi drugače imeli trikotnike. Torej imamo res natanko $t+1$ točk, ki so sosednje tako s točko $p$ kot s točko $q$. □

Med parametri posplošenega četverokotnika mora veljati tudi naslednja zveza.

**Izrek 2.3.3** *Naj bo $GQ(s,t)$ posplošen četverokotnik. Če je $s>1$, potem je $t \leq s^2$ in dualno če je $t>1$, je $s \leq t^2$.*

**Dokaz.** Naj bosta $p$ in $q$ dve nesosednji točki v $GQ(s,t)$. Definirajmo množico $X = \{x \,|\, p \text{ ni sosednja } x \text{ in } q \text{ ni sosednja } x\}$. Torej je moč množice $X$ enaka $|X| = n-2-(t+1)(2s-1)$ in jo označimo z $d$. S $t_i$ označimo število vseh točk $y$, ki so sosednje točkam $p$, $q$ in $x_i$. Preštejmo število urejenih parov $(x_i, y)$, kjer je $x_i \in X$ in je točka $y$ sosednja s točkami $p$, $q$ in $x_i$, na dva načina. Če uporabimo lemo 2.3.2 vidimo, da je število točk, ki niso sosednje ne s točko $p$ ne s točko $q$, a ležijo na premicah, ki vsebujejo točke sosednje tako $p$ kot $q$, enako $s(t-1)(t+1)$ kar je po drugi strani enako vsoti $\sum_i t_i$. Torej imamo

$$\sum_i t_i = s(t-1)(t+1). \tag{2.1}$$

Podobno preštejmo število urejenih trojic $(x_i, y, y')$, kjer $y'$ ustreza istim pogojem kot $y$ in $y \neq y'$. Po eni strani imamo $\sum_i t_i(t_i-1)$ takih trojic. Po drugi strani pa lahko po lemi 2.3.2 izberemo $y$ in $y'$ na $(t+1)t$ načinov. Ker gre skozi $y$ natanko $t+1$ premic, sledi, da $y'$ seka $t-1$ premic skozi $y$ na katerih ne ležita ne točka $p$ ne $q$. Torej dobimo enakost

$$\sum_i t_i(t_i-1) = (t-1)t(t+1).$$

Če upoštevamo še enakost (2.1), dobimo

$$\sum_i t_i^2 = (t-1)(t+1)(s+t).$$

Ker je po neenakosti med kvadratno in aritmetično sredino $d\sum_i t_i^2 \geq (\sum_i t_i)^2$, velja

$$d(t-1)(t+1)(s+t) \geq s^2(t-1)^2(t+1)^2,$$

oziroma

$$d(s+t) \geq s^2(t-1)(t+1). \tag{2.2}$$

Vstavimo v enačbo (2.2) še vrednost za $d$ in dobimo

$$(s-1)(s^2-t)t \geq 0.$$

Ker je po predpostavki $s > 1$, mora biti tudi $s^2 - t > 0$. □

## 2.4 Družine posplošenih četverokotnikov

Sedaj ko smo spoznali že precej lepih lastnosti posplošenih četverokotnikov, nas zanima ali poleg že omenjenih primerov obstaja še kakšen ali jih je mogoče le končno število. Jasno je, da vsa orodja, ki stojijo zadaj, ne bi bila tako zanimiva, če ne bi imeli tudi dovolj materiala za obdelavo. Tako tudi res obstajajo neskončne družine posplošenih četverokotnikov. Omenili smo že dve. V prvo družino spadajo mreže, torej posplošeni četverokotniki, kjer je $t = 1$, parameter $s$ pa je poljuben. Povedali smo že, da je dual posplošenega četverokotnika spet posplošen četverokotnik. Tako imamo tudi neskončno družino dualnih mrež, kjer je $s = 1$, parameter $t$ pa ostane poljuben. V tem razdelku pa si bomo ogledali še en primer konstrukcije manj trivialne neskončne družine posplošenih četverokotnikov. Pri tem bomo sledili konstrukciji v [1]. Najprej si poglejmo nekaj definicij.

**Projektivna ravnina** je linearen prostor, v katerem se poljubni premici sekata in v katerem obstajajo take štiri točke, da niso nobene tri izmed njih kolinearne. **Stožernica** $Q$ v projektivnem prostoru $P(d,k)$ nad obsegom $\mathbb{F}$ je množica točk $x = (x_0, \ldots, x_d)$ v $P(d,k)$, ki zadoščajo homogeni enačbi drugega reda

$$\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} a_{ij}x_ix_j = 0, \tag{2.3}$$

kjer so koordinate $x_i$ in koeficienti $a_{ij}$ elementi obsega $\mathbb{F}$. **Polaren prostor** je skoraj linearen prostor, za katerega velja, da gre skozi vsako točko $p$, ki ne leži na premici

$\ell$ ali ena premica, ki seka $\ell$, ali pa gre skozi vsako točko na $\ell$ premica, ki gre tudi skozi $p$. Poglejmo si kolikokrat lahko premica $\ell$ v projektivnem prostoru $P(d,k)$ seka stožernico $Q$.

**Lema 2.4.1** *Naj bosta $Q$ stožernica v projektivnem prostoru $P(d,k)$ nad obsegom $\mathbb{F}$ in $\ell$ premica v njem. Potem je $|Q \cap \ell| \in \{0, 1, 2, k+1\}$.*

**Dokaz.** Naj premico $\ell$ določata točki $p = (p_0, \ldots, p_d)$ in $q = (q_0, \ldots, q_d)$. Potem lahko vsako točko $x = (x_0, \ldots, x_d)$, ki leži na $\ell$ zapišemo kot linearno kombinacijo $x = \lambda p + \mu q$ točk $p$ in $q$. Presek premice $\ell$ in stožernice $Q$ je torej množica točk $x$, ki zadoščajo enačbi

$$\sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} a_{ij}(\lambda p_i + \mu q_i)(\lambda p_j + \mu q_j) = 0. \tag{2.4}$$

Enačbo (2.4) lahko preoblikujemo v

$$\lambda^2 \left( \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} a_{ij} p_i p_j \right) + \lambda\mu \left( \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} (a_{ij} + a_{ji}) p_i q_j \right) + \mu^2 \left( \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} a_{ij} q_i q_j \right) = 0. \tag{2.5}$$

Naj bo sedaj moč preseka $|Q \cap \ell| > 2$ in naj bosta $p$ in $q$ točki ležita v njem. Potem zanju velja enačba (2.5). Ker ležita točki $p$ in $q$ na stožernici $Q$, velja zanju enačba (2.3). Torej dobimo

$$\lambda\mu \left( \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} (a_{ij} + a_{ji}) p_i q_j \right) = 0.$$

Če je še vsota $\sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} (a_{ij} + a_{ji}) p_i q_j$ enaka nič, potem sta lahko koeficienta $\lambda$ in $\mu$ poljubna. Torej res vse točke, ki ležijo na premici $\ell$, ležijo tudi na stožernici $Q$. Če pa je kateri od koeficientov $\lambda$ in $\mu$ enak nič, potem sta $p$ in $q$ edini rešitvi enačbe (2.5), kar pa je v protislovju z začetno predpostavko. □

Dokaz naslednjega izreka je zelo podoben dokazu prejšnje leme in ga tukaj ne bomo navedli. Lahko pa ga najdemo v [1].

**Izrek 2.4.2** *Naj bo $Q$ stožernica v projektivnem prostoru $P(d,k)$. Potem njene točke skupaj s premicami, ki v celoti ležijo v $Q$, tvorijo polaren prostor.* □

S pomočjo tega izreka bomo lahko skonstruirali neskončno družino posplošenih četverokotnikov. Naj bo $P(d,k)$ projektiven prostor. Izkaže se, da so stožernice skupaj s svojimi točkami in premicami, ki so v celoti vsebovane v njih, posplošeni četverokotniki, kadar je $d \in \{3,4,5\}$. Za utemeljitev glej [1]. Jasno je, da je parameter $s$ v posplošenem četverokotniku enak parametru $k$ v projektivnem prostoru. Za konkreten $k$ smo v prejšnjih razdelkih povedali že dovolj teorije, da bi lahko prešteli število točk in premic v dobljenem posplošenem četverokotniku. Za splošen primer si bomo pomagali z enačbami za število $r$-razsežnih podprostorov v projektivnih prostorih, ki jih najdemo v [1]. Za število točk $n$ in število premic $m$ dobimo naslednje vrednosti

(i) $P(3,k) : n = (s+1)^2$ in $m = 2(s+1)$,

(ii) $P(4,k) : n = (s+1)(s^2+1)$ in $m = (s+1)(s^2+1)$,

(iii) $P(5,k) : n = (s+1)(s^3+1)$ in $m = (s^2+1)(s^3+1)$.

V prvem primeru imamo posplošeni četverokotnik $GQ(k,1)$, ki je mreža, v drugem $GQ(k,k)$ in v tretjem $GQ(k,k^2)$. Tako dobljene družine ponavadi označujemo s $Q(d,k)$. S tem smo opisali enega izmed treh klasičnih primerov posplošenih četverokotnikov. Ker bi za preostala dva primera potrebovali še več dodatnih priprav, se bomo na tem mestu ustavili.

# Poglavje 3

# Krepko-regularni grafi

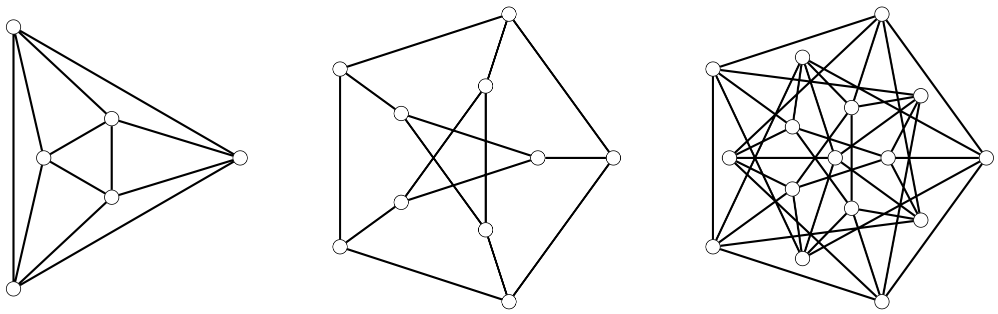
V tem poglavju bomo pobližje spoznali krepko-regularne grafe. Pri tem bomo v začetnih razdelkih sledili knjigi [10]. Ker bomo privzeli poznavanje osnovnih pojmov iz teorije grafov, si lahko njihove definicije in lastnosti preberete v [10], [12] ali [23]. Eden prvih, ki so se ukvarjali s krepko-regularnimi grafi je bil Bose, ki je leta 1963 uvedel pojem krepko-regularnih grafov (glej [5]). Le-te so uporabljali tudi v teoriji permutacijskih grup in pri asociativnih shemah (glej [18]).

V prvem razdelku bomo spoznali kaj so to krepko-regularni grafi in si pogledali nekaj enostavnih primerov. Nato bomo v drugem razdelku govorili o delitvi na primitivne in neprimitivne krepko-regularne grafe in navedli klasifikacijo slednjih. V tretjem razdelku bomo v teorijo grafov pripeljali orodja iz linearne algebre in pogledali kaj lahko povemo o lastnih vrednostih krepko-regularnih grafov. V četrtem razdelku bomo spoznali posebno družino krepko-regularnih grafov, tj. konferenčne grafe. To so edini krepko-regularni grafi, ki imajo lahko neceloštevilske lastne vrednosti. Nazadnje si bomo v petem razdelku ogledali kakšno povezavo imajo delne geometrije s krepko-regularnimi grafi in kdaj lahko le-te predstavimo kot delne geometrije.

## 3.1 Definicije in primeri

Grafu $G$, ki je regularen in ni niti poln niti prazen, rečemo da je **krepko-regularen**, če je za njegovi poljubni različni vozlišči $u$ in $v$ število njunih skupnih sosedov odvisno le od tega, ali sta vozlišči $u$ in $v$ sosednji ali ne. Torej imajo krepko-regularni grafi štiri parametre. Prvi je število vozlišč $n$. Ker je graf $G$ po definiciji regularen, ima vsako vozlišče enako stopnjo $k$, ki predstavlja drugi parameter. Tretji parameter predstavljata število skupnih vozlišč $a$ dveh sosednjih vozlišč v grafu. Četrti parameter pa je število skupnih vozlišč $c$ dveh nesosednjih vozlišč v grafu. Rečemo, da imamo $(n, k; a, c)$-krepko-regularen graf. V literaturi pogosto najdemo parametra $a$ in $c$ označena tudi kot $\lambda$ in $\mu$.

Najmanjši povezan krepko-regularen graf je cikel na štirih vozliščih, $C_4$, ki ima parametre $(4, 2; 0, 2)$. Bolj zanimivi primeri imajo seveda več vozlišč. Med manjše krepko-regularne grafe spadajo med drugim tudi oktaeder s parametri $(6, 4; 2, 4)$, Petersenov graf s parametri $(10, 3; 0, 1)$ in Clebschev graf s parametri $(16, 5; 0, 2)$.



Slika 3.1: Oktaeder, Petersenov graf in Clebschev graf.

**Opomba.** Nekateri avtorji štejejo med krepko-regularne grafe tudi polne in prazne grafe. Regularnim grafom, ki niso krepko-regularni, pa rečejo šibko-regularni grafi.

## 3.2 Primitivnost in neprimitivnost

Najprej si poglejmo kakšna je motivacija za vpeljavo izrazov **primitiven** oziroma **neprimitiven** krepko-regularen graf.

**Lema 3.2.1** *Naj bo graf $G$ $(n, k; a, c)$-krepko-regularen. Potem je tudi njegov komplementarni graf $\overline{G}$ krepko-regularen in ima parametre*

$$(n, n-k-1; n-2k-2+c, n-2k+a).$$

**Dokaz.** Jasno je, da graf $\overline{G}$ ni ne poln ne prazen. Ker je graf $G$ regularen, ima vsako njegovo vozlišče stopnjo $k$. Iz definicije komplementa grafa sledi, da ima vsako vozlišče v grafu $\overline{G}$ stopnjo $n-k-1$. Izberimo si v grafu $\overline{G}$ poljubni sosednji vozlišči $u$ in $v$. Ti vozlišči sta si v grafu $G$ nesosednji. Vozlišče $w$ bo v grafu $\overline{G}$ sosednje tako vozlišču $u$ kot $v$ natanko tedaj, ko v grafu $G$ ne bo sosednje nobenemu od njiju. Ker je graf $G$ $k$-regularen, je število vozlišč, ki niso sosednja vozlišču $u$ enako $n-k-1$. Če izmed teh odstranimo še vozlišče $v$, jih je torej $n-k-2$. Od teh je takšnih, ki so sosednja vozlišču $v$, ravno $k-c$, saj je $c$ po definiciji število skupnih sosedov dveh nesosednjih vozlišč v grafu $G$. Skupaj imamo tako $n-2k-2+c$ vozlišč, ki so v grafu $\overline{G}$ sosednja tako vozlišču $u$ kot $v$. Ker sta bili vozlišči $u$ in $v$ na začetku izbrani poljubno, je ta vrednost neodvisna od izbire sosednjih vozlišč v grafu $\overline{G}$. S podobnim razmislekom dobimo tudi, da je število skupnih sosedov dveh nesosednjih vozlišč v grafu $\overline{G}$ enako $n-2k+a$. S tem smo pokazali, da graf $\overline{G}$ zadošča vsem postavkam definicije krepko-regularnih grafov. $\square$

Povezanemu krepko-regularnemu grafu $G$ rečemo, da je **primitiven**, če je tudi njegov komplement $\overline{G}$ povezan. Za krepko-regularne grafe, ki niso primitivni, pravimo, da so **neprimitivni**. Naslednja lema nam poda karakterizacijo neprimitivnih krepko-regularnih grafov.

**Lema 3.2.2** *Krepko-regularen graf s parametri $(n,k;a,c)$ je neprimitiven natanko tedaj, ko je $c=k$ ali $c=0$.*

**Opomba.** V primeru, ko je $c=k$, so to polni večdelni grafi, v primeru, ko je $c=0$, pa imamo disjunktne unije enakih polnih grafov. Zato je za neprimitivne krepko-regularne grafe v uporabi tudi izraz **trivialni** krepko-regularni grafi.

**Dokaz.** Naj bo graf $G$ $(n,k;a,c)$-krepko-regularen. Če naj bo graf $G$ povezan, mora biti $c>0$. Naj bo sedaj $c=k$. Dovolj je pokazati, da je graf $\overline{G}$ nepovezan. Izberimo si vozlišče $u$ v grafu $G$. Njemu sosednje vozlišče $v$ ima $k-1-a$ sosednjih vozlišč, ki niso sosednja $u$. Torej imamo $k(k-1-a)$ poti dolžine 2, ki povezujejo vozlišče $u$ z njemu nesosednjimi vozlišči. Po drugi strani ima vozlišče $w$, ki ni sosednje vozlišču $u$, z njim $c$ skupnih sosedov. Vemo že, da je število vozlišču $u$ nesosednjih vozlišč enako $n-k-1$. Skupaj imamo torej $c(n-k-1)$ poti dolžine 2, ki povezujejo vozlišče $u$ z njemu nesosednjimi vozlišči. Torej velja

$$k(k-1-a) = c(n-k-1). \tag{3.1}$$

Po naši predpostavki je $c = k$ in zato $a = 2k-n$. Če to vstavimo v formulo za četrti parameter $\overline{c}$ komplementarnega grafa $\overline{G}$ iz leme 3.2.1, dobimo, da je $\overline{c} = 0$. Torej je graf $\overline{G}$ nepovezan. □

**Opomba.** Iz enačbe (3.1) lahko izrazimo število vozlišč $n$ kot

$$n = \frac{k(k-1-a)}{c} + k + 1,$$

torej vidimo, da štirje parametri krepko-regularnih grafov niso neodvisni med sabo in so v resnici dovolj le trije.

Poglejmo si še eno lemo, kjer uporabljamo samo kombinatorični pristop. Z njeno pomočjo bomo tudi videli, da je cikel na petih vozliščih, $C_5$, najmanjši primitiven krepko-regularen graf.

**Lema 3.2.3** *Naj bo $p$ praštevilo. Krepko-regularen graf $G$ s $p+1$ vozlišči je neprimitiven.*

**Dokaz.** Iz enačbe (3.1) sledi

$$k(k-1-a) = c(p-k).$$

Ker je graf $G$ krepko-regularen, velja $1 < k < p$. To pa pomeni, da sta si števili $k$ in $p-k$ tuji. Torej mora $k$ deliti $c$. Ker je $c \leq k$ mora torej veljati $c = 0$ ali $c = k$. Po lemi 3.2.2 je tako graf $G$ neprimitiven. □

Ker je v splošnem težko povedati kaj več o krepko-regularnih grafih samo s pomočjo kombinatoričnega pristopa, si poglejmo kako lahko nanje pogledamo z vidika linearne algebre.

## 3.3 Lastne vrednosti

Če se želimo pogovarjati o lastnih vrednostih krepko-regularnih grafov, moramo najprej vpeljati matrike. Najbolj naraven način za algebraično predstavitev grafov je predstavitev z matriko sosednosti. To je binarna matrika, v kateri vrstice in stolpce označimo z vozlišči. Na mestu $uv$ ima enico natanko tedaj, ko sta vozlišči $u$ in $v$ povezani. Z $I$ bomo označevali identično matriko, z $J$ pa matriko samih enk. Tako je matrika $J - I$ matrika sosednosti za poln graf. Naslednja lema nam bo povedala kakšno obliko imajo matrike sosednosti pri krepko-regularnih grafih.

**Lema 3.3.1** *Naj bo $G$ graf, ki ni ne poln ne prazen, in $A$ njegova matrika sosednosti. Potem je graf $G$ krepko-regularen natanko tedaj, ko lahko matriko $A^2$ zapišemo kot linearno kombinacijo matrik $A$, $I$ in $J$.*

**Dokaz.** ($\Rightarrow$) Ker je $A$ matrika sosednosti grafa $G$, je $uv$-ti element matrike $A^2$ enak številu poti dolžine 2 od vozlišča $u$ do vozlišča $v$. Naj bo graf $G$ krepko-regularen. Potem imamo v primeru, ko gre za eno in isto vozlišče, $k$ takih poti. Če sta si vozlišči sosednji, imamo takšnih poti $a$, sicer pa $c$. Če povzamemo te ugotovitve, vidimo, da velja

$$A^2 = kI + aA + c(J - I - A). \tag{3.2}$$

($\Leftarrow$) V obratno smer je zadeva še lažja, saj vidimo, da je linearna kombinacija 3.2 pravzaprav definicija krepko-regularnih grafov. $\square$

Iz teorije grafov vemo, da ima graf $G$ s premerom $d$ vsaj $d + 1$ različnih lastnih vrednosti (glej [10, 2.5.2]). Ker imajo vsi povezani krepko-regularni grafi premer 2, imajo torej vsaj tri različne lastne vrednosti. Naslednja trditev nam bo pokazala, da jih imajo največ tri.

**Trditev 3.3.2** *Naj bo $G$ krepko-regularen graf s parametri $(n, k; a, c)$ in $A$ njegova matrika sosednosti. Označimo še $\Delta = (a - c)^2 + 4(k - c)$. Potem ima matrika $A$ lastne vrednosti $(a - c - \sqrt{\Delta})/2$ in $(a - c + \sqrt{\Delta})/2$ in stopnjo $k$.*

**Dokaz.** Ker je graf $G$ $k$-regularen, je $k$ ena izmed njegovih lastnih vrednosti. Lastni vrednosti $k$ pripada lastni vektor $\boldsymbol{j}$, ki je vektor samih enic. Naj bo $\boldsymbol{z}$ lastni vektor matrike $A$, ki je pravokoten na $\boldsymbol{j}$, in $\vartheta$ njemu pripadajoča lastna vrednost. Preoblikujmo enačbo (3.2) v

$$A^2 - (a-c)A - (k-c)I = cJ.$$

Če pomnožimo to enačbo z $\boldsymbol{z}$ in upoštevamo, da je $J\boldsymbol{z} = 0$, dobimo

$$\vartheta^2 - (a-c)\vartheta - (k-c) = 0.$$

Ničli te enačbe sta torej edini možnosti za preostale lastne vrednosti. Ti ničli pa ravno ustrezata vrednostim iz trditve. □

**Lema 3.3.3** *Povezan regularen graf $G$ z natanko tremi različnimi lastnimi vrednostmi je krepko-regularen.*

**Dokaz.** Naj bo $G$ $k$-regularen graf na $n$ vozliščih. Ker ima $G$ natanko tri različne lastne vrednosti, ne more biti poln graf, in ima zato premer 2 (glej [10, 2.5.2]). Ker je regularen, vemo, da je ena od njegovih lastnih vrednosti $k$ (glej [10, 2.4.1]). Označimo preostali dve s $\vartheta$ in $\tau$. Naj bo še $p(x) = (x-\vartheta)(x-\tau)$. Potem je $(A-kI)p(A) = 0$ in stolpci matrike $p(A)$ ležijo v jedru $\ker(A-kI)$. Ker je $G$ povezan, ima lastna vrednost $k$ večkratnost 1, zato je tudi dimenzija jedra $\ker(A-kI)$ enaka 1. Ker lastni vrednosti $k$ pripada lastni vektor $\boldsymbol{j}$, so vsi stolpci matrike $p(A)$ njegovi večkratniki. Ker je matrika $A$ simetrična in ima na diagonali same ničle, je tudi matrika $p(A)$ simetrična. Torej velja $p(A) = cJ$. Sedaj lahko pišemo

$$p(A) = (A-\vartheta I)(A-\tau I) = A^2 - (\vartheta+\tau)A + \vartheta\tau I = cJ,$$

oziroma, če preoblikujemo

$$A^2 = (\vartheta+\tau)A - \vartheta\tau I + cJ.$$

S tem smo pokazali, da je $A^2$ linearna kombinacija matrik $A$, $I$ in $J$, kar je po lemi 3.3.1 dovolj, da je graf $G$ krepko-regularen. □

Vsak primitiven krepko-regularen graf ima torej natanko tri različne lastne vrednosti, $\tau$, $\vartheta$ in stopnjo $k$. Iz trditve 3.3.2 sledi, da je $\tau\vartheta = c-k < 0$. Torej velja

$\tau < 0 < \vartheta < k$. Večkratnost lastnih vrednosti $\tau$ in $\vartheta$ bomo ozančevali z $m_\tau$ in $m_\vartheta$, večratnost $k$ pa je pri povezanih krepko-regularnih grafih vedno enaka 1. Naslednja lema nam bo povedala, da je za izračun večkratnosti lastnih vrednosti povezanega krepko-regularnega grafa $G$ dovolj poznati le njegove parametre.

**Lema 3.3.4** *Večkratnosti $m_\vartheta$ in $m_\tau$ lastnih vrednosti $\vartheta$ in $\tau$ krepko-regularnega grafa $G$ lahko izrazimo z njegovimi parametri kot*

$$\begin{aligned} m_\vartheta &= \frac{1}{2}\left(n-1-\frac{(n-1)(a-c)+2k}{\sqrt{\Delta}}\right), \\ m_\tau &= \frac{1}{2}\left(n-1+\frac{(n-1)(a-c)+2k}{\sqrt{\Delta}}\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

*kjer smo z $\Delta$ označili izraz $(a-c)^2+4(k-c)$.*

**Dokaz.** Vsota večkratnosti lastnih vrednosti je $m_\tau + m_\vartheta + 1 = n$. Vemo tudi, da je sled matrike sosednosti $A(G)$ enaka 0. Zato velja $m_\tau\tau + m_\vartheta\vartheta + k = \mathrm{sled}(A) = 0$. Iz teh dveh enačb dobimo

$$m_\tau = \frac{(n-1)\vartheta + k}{\vartheta - \tau} \qquad \text{in} \qquad m_\vartheta = \frac{(n-1)\tau + k}{\tau - \vartheta}. \tag{3.4}$$

Prej smo že videli, da je $\tau\vartheta = c-k$. Podobno velja tudi $\tau + \vartheta = a - c$. Torej imamo

$$\Delta = (a-c)^2 + 4(k-c) = (\vartheta+\tau)^2 - 4\vartheta\tau = (\vartheta-\tau)^2.$$

Če vstavimo dobljene rezulate v enačbo (3.4), dobimo

$$\begin{aligned} m_\vartheta &= \frac{(n-1)\tau + k}{\tau - \vartheta} \\ &= \frac{(n-1)((\tau-\vartheta)+(\tau+\vartheta))+2k}{2(\tau-\vartheta)} \\ &= \frac{1}{2}\left(n-1-\frac{(n-1)(a-c)+2k}{\sqrt{\Delta}}\right), \\ m_\tau &= n-1-m_\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\left(n-1+\frac{(n-1)(a-c)+2k}{\sqrt{\Delta}}\right). \end{aligned}$$

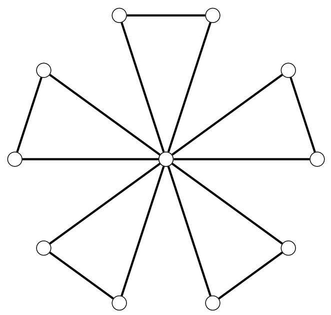
□

Ker so večkratnosti lastnih vrednosti naravna števila, v enačbah (3.3) pa imamo na desni strani v splošnem realni števili, smo s tem dobili netrivialni pogoj za parametre krepko-regularnega grafa. Kot primer uporabe krepko-regularnih grafov v povsem navadni nalogi, si poglejmo izrek o prijateljstvih.

**Izrek 3.3.5** *Če ima v skupini ljudi vsak par oseb natanko enega skupnega prijatelja, potem obstaja oseba, ki je prijatelj vseh v skupini (prijateljstvo je vzajemno).*

**Dokaz.** Vsaka oseba v skupini naj predstavlja vozlišče grafa $G$. Povezave naj predstavljajo relacijo "prijatelj". Trdimo, da je graf $G$ ali graf trikotnikov, ki imajo vsi skupno vozlišče, ali pa je krepko-regularen s parametri $(n, k; 1, 1)$.

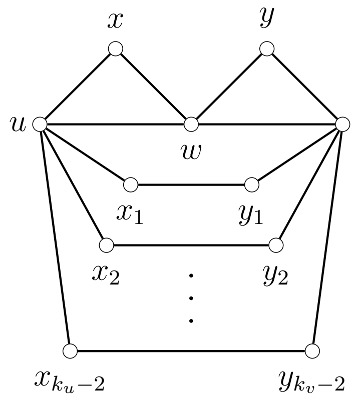
Pokažimo najprej, da prvi del trditve drži. Naj bo $s$ oseba, ki je prijatelj z vsemi ostalimi. Potem je $s$ edini skupni prijatelj poljubnih drugih dveh oseb $u$ in $v$ v skupini. Naj bo sedaj $u$ poljubna oseba, ki ni $s$. Ker je $s$ prijatelj z vsemi, je prijatelj tudi z $u$, in tako mora obstajati še oseba $v$, ki je njun skupni sosed. Torej v grafu $G$ res dobimo same trikotnike z enim skupnim vozliščem. Takšnemu grafu rečemo mlin.



Slika 3.2: Primer mlina na 11 vozliščih

Poglejmo si sedaj še drugi del trditve. Najprej opazimo, da v grafu ne moremo imeti ciklov dolžine 4, ker bi sicer nesosednji vozlišči v grafu imeli vsaj dva skupna soseda. Nadalje pokažimo, da mora biti $G$, ki ne ustreza prvemu delu trditve, regularen. Označimo stopnjo vozlišča $u$ s $k_u$. Naj imata nesosednji vozlišči $u$ in $v$ skupnega soseda $w$. Naj imata še vozlišči $u$ in $w$ skupnega soseda $x$, vozlišči $v$ in $w$ pa skupnega soseda $y$. Označimo preostale sosede vozlišča $u$ z $x_1, \ldots, x_{k_u-2}$. Ker graf $G$ ni mlin, si lahko na začetku izberemo tako vozlišče $u$, da ti sosedi obstajajo. Skupne sosede vozlišč $x_i$ in $v$ označimo z $y_i$. Ker v grafu ne sme biti ciklov dolžine 4, so vozlišča $y_i$ različna med sabo. Drugače bi namreč imeli cikel $(x_i, y_i, x_j, u)$. Torej velja $k_u = k_v$.

Naj bosta sedaj $u$ in $v$ sosednji vozlišči z različnima stopnjama in naj bo $w$ njun skupni sosed. Brez škode za splošnost lahko rečemo, da se stopnji vozlišč $u$ in




Slika 3.3: Izrek o prijateljstvih.

$w$ razlikujeta, saj bi sicer imeli $k_u = k_w = k_v$. Naj bo še $x$ neko poljubno drugo vozlišče, ki je povezano ali z $u$ ali z $v$. Takšno vozlišče obstaja, ker je $k_u \neq k_v$. Seveda $x$ ne sme biti povezan z obema, ker bi potem vozlišči $u$ in $v$ imeli več kot enega skupnega soseda. Po enakem razmisleku mora biti vozlišče $x$ povezano tudi z enim od $u$ in $w$. Vozlišče $x$ ne more biti hkrati povezano z $v$ in $w$, saj je že $u$ njun skupni sosed, zato mora biti povezano z vozliščem $u$. Sedaj naj $x$ prevzame vlogo vozlišča $v$. Če zgodbo ponovimo, dobimo za graf $G$ kar mlin, kar pa je v protislovju z začetno predpostavko. Torej je graf $G$ res regularen. Ker ima poljuben par oseb natanko enega skupnega prijatelja, ima graf $G$ premer $d = 2$. Ker je še regularen, mora biti krepko-regularen s parametri $(n, k; 1, 1)$. Enačbi (3.3) za večkratnosti lastnih vrednosti nam data netrivialen pogoj za parametre grafa. Ker morata biti celi števili, mora biti $k/\sqrt{k-1}$ celo število. Če pišemo $k - 1 = a^2$, dobimo, da mora biti $(a^2 + 1)/a = a + 1/a$ celo število. Torej mora biti $a = 1$ in zato $k = 2$. Krepko-regularen graf s parametri $(3, 2; 1, 1)$ pa je kar trikotnik in torej ni v nasprotju s prvim delom trditve, da je graf $G$ mlin. □

## 3.4 Konferenčni grafi

Konferečni grafi so krepko-regularni grafi, za katere velja $m_\vartheta = m_\tau$.

**Lema 3.4.1** *Naj bo $G$ krepko-regularen graf s parametri $(n, k; a, c)$ in tremi različ-*

*nimi lastnimi vrednostmi $k$, $\vartheta$ in $\tau$. Potem velja*

$$(\vartheta-\tau)^2=\frac{nk\overline{k}}{m_\vartheta m_\tau},$$

*kjer smo s $\overline{k}$ označili stopnjo komplementarnega grafa $\overline{G}$.*

**Dokaz.** V dokazu bomo uporabili enačbi (3.3) in enakost (3.1). Računamo

$$\begin{aligned}\frac{nk\overline{k}}{m_\vartheta m_\tau} &= \frac{4nk\overline{k}}{(n-1)^2-((n-1)(a-c)+2k)^2/\Delta}\\ &= \frac{4nk\overline{k}\Delta}{(n-1)^2((a-c)^2+4(k-c))-((n-1)(a-c)+2k)^2}\\ &= \frac{nk\overline{k}\Delta}{(n-1)(nk-nc-k+c-ak+ck)-k^2}.\end{aligned}$$

Sedaj uporabimo enačbo (3.1) in dobimo

$$\frac{nk\overline{k}}{m_\vartheta m_\tau}=\frac{nk\overline{k}\Delta}{(n-1)(nk-k^2)-k^2}=\frac{nk\overline{k}\Delta}{nk(n-k-1)}=\Delta.$$

S tem smo dokaz končali. □

S pomočjo te leme lahko natanko določimo parametre konferenčnega grafa.

**Trditev 3.4.2** *Naj bo $G$ krepko-regularen graf s parametri $(n,k;a,c)$. Če je $G$ konferenčen graf, potem imata $G$ in $\overline{G}$ oba parametre*

$$\Big(n,\frac{n-1}{2};\frac{n-1}{4},\frac{n-5}{4}\Big).$$

**Dokaz.** Dovolj je pokazati, da ima graf $G$ takšne parametre. Lema 3.2.1 nam namreč zagotovi, da ima potem takšne parametre tudi komplementaren graf $\overline{G}$. Po definiciji konferenčnih grafov je $m_\vartheta=m_\tau$ in zato je $m_\vartheta=(n-1)/2$. Ker sta si tedaj $m_\vartheta$ in $n$ tuji si števili, sledi iz leme 3.4.1, da $m_\vartheta^2$ deli $k(n-k-1)$. Ker je $k+(n-k-1)=n-1$, lahko to enakost kvadriramo in upoštevamo še neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino, da dobimo $n(n-k-1)\le(n-1)^2/4=m_\vartheta^2$. Ker enakost velja le, kadar je $k=n-k-1$, in je $m_\vartheta^2\le n(n-k-1)$, dobimo, da je $n=2k+1$, oziroma $k=(n-1)/2$. Če te rezultate vstavimo v enačbo (3.3), dobimo, da je $c-a=1$. Po drugi strani nam enačba (3.1) pravi, da je $k(k-a-1)=$

$(n-k-1)c = kc$ in od tod $c + a = k - 1$. Sedaj dobimo $a = (k-2)/2$ in $c = k/2$, kar smo tudi želeli pokazati. □

Poglejmo si sedaj, kaj lahko povemo o krepko-regularnih grafih s praštevilskim številom vozlišč.

**Trditev 3.4.3** *Naj bo $p$ praštevilo in $G$ krepko-regularen graf s $p$ vozlišči. Potem je $G$ konferenčni graf.*

**Dokaz.** Predpostavimo, da $G$ ni konferenčni graf. Ker je

$$m_\tau - m_\vartheta = \frac{(n-1)(a-c)+2k}{\sqrt{\Delta}},$$

mora biti $\sqrt{\Delta}$ ali celo število ali pa velja $m_\vartheta = m_\tau$. V drugem primeru pridemo v protislovje s predpostavko, da $G$ ni konferenčni graf. Torej mora biti $\sqrt{\Delta}$ celo število. Lema 3.4.1 nam pove, da velja

$$\Delta = (\vartheta - \tau)^2 = \frac{pk(n-k-1)}{m_\vartheta m_\tau}.$$

Torej je razlika $\vartheta - \tau$ tudi celo število. Ker $G$ ni ne poln ne prazen, so vrednosti $k$, $n-k-1$, $m_\vartheta$ in $m_\tau$ neničelne in tuje praštevilu $p$. Torej je izraz $(\vartheta-\tau)^2$ deljiv s $p$, ne pa tudi s $p^2$. To pa je v protislovju s predpostavko, da je razlika $\vartheta - \tau$ celo število. □

**Opomba.** V dokazu smo videli, da ima krepko-regularen graf, ki ni konferenčen, vse lastne vrednosti celoštevilske. Ta podatek pride velikokrat prav pri raznih dokazih.

## 3.5 Povezave z delnimi geometrijami

Delne geometrije lahko zelo lepo povežemo z grafi, ki pri tem dobijo lepe lastnosti. Če dobro pogledamo definicijo krepko-regularnih grafov, ki smo jo navedli na začetku poglavja, vidimo, da se zelo lepo ujema z definicijo delnih geometrij. Da bomo geometrijo lahko prenesli v jezik grafov, najprej povejmo kaj je to **točkovni graf** delne geometrije. Definiramo ga kot graf, ki ima za vozlišča točke delne geometrije. Dve vozlišči sta povezani natanko tedaj, ko sta v delni geometriji kolinearni. Zato mu včasih rečemo tudi **graf kolinearnosti**.

**Lema 3.5.1** *Točkovni graf delne geometrije $pg(s,t,\alpha)$ je krepko-regularen s parametri $n=(s+1)(st+\alpha)/\alpha$, $k=s(t+1)$, $a=t(\alpha-1)+s-1$ in $c=\alpha(t+1)$. Njegove lastne vrednosti so $k$, $s-\alpha$ in $-t-1$.*

**Dokaz.** Formulo za število točk delne geometrije smo spoznali že v lemi 2.2.1. Ker smo točke delne geometrije enačili s točkami v grafu, mora torej tudi graf imeti isto število točk. Da dobimo parameter $k$, moramo le prešteti število točk na $t+1$ premicah, ki grejo skozi dano točko $p$. Ker na vsaki premici leži $s+1$ točk in je ena od njih vedno $p$, imamo res stopnjo $k=s(t+1)$. Izberimo si sedaj dve kolinearni točki $p$ in $q$ v delni geometriji. Skozi $p$ gre poleg premice $pq$ še $t$ premic. Na vsaki od teh premic leži $\alpha$ točk, ki so kolinearne tudi s $q$. Ker je ena od njih vedno $p$ in ker na premici $pq$ leži poleg $p$ in $q$ še $s-1$ točk, imamo torej skupaj $a=t(\alpha-1)s-1$. Sedaj naj bosta $p$ in $q$ dve nekolinearni točki v delni geometriji. Tokrat je štetje točk še lažje. Po definiciji delnih geometrij leži točka $p$ na $t+1$ premicah in vsaka od njih vsebuje $\alpha$ točk, ki so kolinearne tudi s $q$. Tako dobimo še zadnji parameter $c=\alpha(t+1)$. Stopnja regularnega grafa je vedno tudi njegova lastna vrednost. Lastni vrednosti $s-\alpha$ in $-t-1$ pa dobimo tako, da uporabimo lemo 3.3.2 in že prej dokazane parametre. □

V teoriji grafov lahko vsakemu grafu $G$ priredimo **graf povezav** $G'$, ki ga dobimo tako, da povezave iz $G$ postanejo vozlišča v $G'$, dve vozlišči v $G'$ pa sta povezani natanko tedaj, ko imata kot povezavi v $G$ skupno vozlišče. Zanimivo je, da je tudi graf povezav delne geometrije krepko-regularen.

**Lema 3.5.2** *Graf povezav točkovnega grafa delne geometrije $pg(s,t,\alpha)$ je krepko-regularen graf s parametri $n=(t+1)(st+\alpha)/\alpha$, $k=t(s+1)$, $a=s(\alpha-1)+t-1$ in $c=\alpha(s+1)$. Njegove lastne vrednosti so $k$, $t-\alpha$ in $-s-1$.*

**Dokaz.** Ker je graf povezav delne geometrije $pg(s,t,\alpha)$ enak točkovnemu grafu njej dualne delne geometrije $pg(t,s,\alpha)$, lahko uporabimo lemo 3.5.1 in v njej zamenjamo parametra $s$ in $t$. □

Sedaj, ko smo že spoznali matrike sosednosti in pa lastne vrednosti krepko-regularnih grafov, lahko dokažemo tudi naslednjo lemo.

**Lema 3.5.3** *V posplošenem četverokotniku $GQ(s,t)$ velja*

$$(s+t) \mid st(s+1)(t+1).$$

**Dokaz.** Označimo točke v $GQ(s,t)$ s $p_1, \ldots, p_n$. Naj bo $A$ matrika sosednosti za te točke. Poglejmo si kako se izražajo elementi $c_{ij}$ matrike $A^2$. Na diagonali imamo $c_{ii} = s(t+1)$. Lema 2.3.2 nam pove, da za nesosednji točki $p_i$ in $p_j$ velja $c_{ij} = t+1$. Preostane nam še primer, ko sta $p_i$ in $p_j$ sosednji točki. Tedaj velja $c_{ij} = s-1$, saj na premici skoznju leži še $s-1$ točk. Torej lahko matriko $A^2$ zapišemo kot

$$A^2 = (t+1)J + (t+1)(s-1)I + (s-t-2)A,$$

kjer smo z $I$ označili identično matriko, z $J$ pa matriko samih enic. Rezultati linearne algebre nam povejo, da je tedaj $s(t+1)$ lastna vrednost matrike $A$. Matrika $J$ ima lastno vrednost 0 z večratnostjo $n-1$ in lastno vrednost $n$ z večkratnostjo 1. Ker velja

$$((t+1)s)^2 = (t+1)n + (t+1)(s-1) + (s-t-2)(t+1)s,$$

vidimo, da lastna vrednost $s(t+1)$ matrike $A$ sovpada z lastno vrednostjo $n$ matrike $J$ in ima tako večkratnost 1. Preostali lastni vrednosti matrike $A$ sta ničli polinoma

$$x^2 - (s-t-2)x - (t+1)(s-1).$$

Torej ima matrika $A$ lastne vrednosti $s(t+1)$, $-t-1$ in $s-1$. Označimo njihove pripadajoče večkratnosti z $m_1 = 1$, $m_2$ in $m_3$. Lastne vrednosti matrike in njihove večkratnosti povezuje enačba

$$s(t+1) - m_2(t+1) + m_3(s-1) = \mathrm{sled}(A) = 0.$$

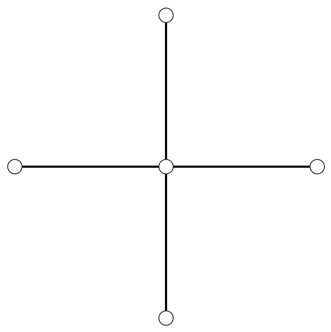
Če uporabimo še zvezo $1 + m_2 + m_3 = n$ in formulo za število točk v posplošenem četverokotniku, lahko $m_3$ izrazimo kot

$$m_3 = \frac{(n-1)(t+1) - s(t+1)}{s+t} = \frac{st(s+1)(t+1)}{s+t}.$$

Ker mora biti večkratnost lastne vrednosti naravno število, mora res $s+t$ deliti izraz $st(s+1)(t+1)$. □

Videli smo, da lahko poljubno delno geometrijo predstavimo kot krepko-regularen graf. Kaj pa obrat? Izkaže se, da ne moremo vsakega krepko-regularnega grafa prenesti v jezik delnih geometrij. Krepko-regularenemu grafu $G$ s parametri $(n, k; a, c)$, katerega parametri zadoščajo enačbam v lemi 3.5.1 za neka naravna števila $s \geq 1$, $t \geq 1$ in $1 \leq \alpha \leq \min(s,t)+1$, rečemo, da je **psevdo-geometričen graf**. Če je $G$ tudi graf kakšne delne geometrije, rečemo, da je **geometričen**.

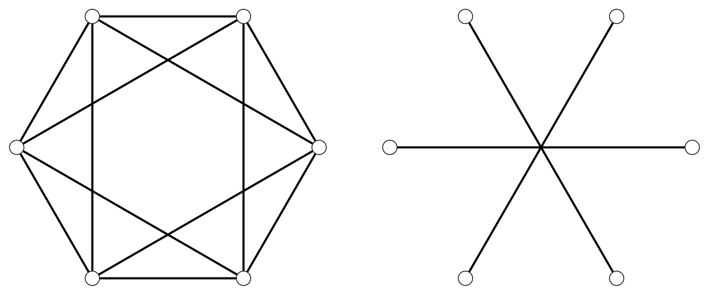
Cameron, Goethals in Seidel so pokazali, da je vsak psevdo-geometričen graf, za kateregea velja $s = t^2$ ali dualno $t = s^2$, geometričen. Primer psevdo-geometričnega grafa, ki ni geometričen, je kar pentagon za katerega dobimo iz enačbe $c = \alpha(t+1) = 1$, da je $\alpha = 1$ in $t = 0$. Iz enačbe $k = s(t+1) = 2$ pa dobimo še $s = 2$. Torej bi pripadajoča delna geometrija izgledala kot slika 3.4, ki pa očitno ne zadošča definiciji delne geometrije, saj ena od točk leži na dveh premicah.



Slika 3.4: Geometrija, ki pripada pentagonu.

Primer krepko-regularnega grafa, ki ni niti psevdo-geometričen, je Petersenov graf, za katerega vemo, da ima parametre $(10, 3; 0, 1)$. Iz enačbe $c = \alpha(t+1) = 1$ namreč dobimo $t = 0$ in $\alpha = 1$, iz enačbe $k = s(t+1) = 3$ pa še $s = 3$. Toda dobljeni parametri ne zadoščajo enačbi $a = t(\alpha - 1) + s - 1 = 0 \neq 2$.

Poglejmo si kaj lahko povemo o komplementu točkovnega grafa delne geometrije. Točkovni graf delne geometrije $pg(1, 1, 2)$, ki jo vidimo na sliki 2.1, je kar trikotnik, katerega komplement nima nobenih povezav in tako ne more biti graf delne geometrije. Na sliki 3.5 sta točkovni graf delne geometrije $pg(2, 1, 2)$, ki je prav tako na sliki 2.1, in njegov komplement.



Slika 3.5: Točkovni graf delne geometrije $pg(2, 1, 2)$ in njen komplement.

Tudi tukaj vidimo, da komplementaren graf ne more biti točkovni graf kake delne geometrije. Izkaže se, da je vprašanje, kdaj komplementaren graf delne geometrije pripada kakšni delni geometriji, zelo težko. Naslednji izrek nam pove, kdaj je komplement točkovnega grafa delne geometrije psevdo-geometričen.

**Izrek 3.5.4** *Naj bo $pg(s, t, \alpha)$ delna geometrija in naj bo $G$ njen točkovni graf. Potem je komplement $G$ psevdo-geometričen in ima parametre $\alpha' = t(s - \alpha)/\alpha$, $s' = st/\alpha$ in $t' = s - \alpha$, natanko tedaj, ko velja*

*(i)* $s > \alpha$,

*(ii)* $\alpha \,|\, st$ *in*

*(iii)* $t(s - \alpha) \leq (s - \alpha + 1)\alpha$.

**Dokaz.** ($\Rightarrow$) Za dokaz v desno stran potrebujemo le omejitve, ki nam jih poda definicija psevdo-geometričnih grafov. Tako je parameter $t' > 0$ in zato velja točka (i). Ker je parameter $\alpha' > 0$, velja (ii). Ker mora biti $\alpha' \leq t' + 1$, dobimo še (iii).

($\Leftarrow$) Dovolj je pokazati, da so $\alpha'$, $s'$ in $t'$ naravna števila, ki zadoščajo pogojem leme 3.5.1. Zaradi točke (ii) sta $\alpha'$ in $s'$ celi števili. Prav tako je $t'$ vedno celo število, saj je definiran kot razlika dveh naravnih števil. Iz pogoja v točki (i) sledi, da morajo biti $\alpha'$, $s'$ in $t'$ vsi večji ali enaki 1. Pogoj, da je $\alpha' \leq s' + 1$ je trivialen. Pogoj, da je $\alpha' \leq t' + 1$ pa sledi iz točke (iii). Preverimo sedaj, da so parametri $k' = s'(t' + 1)$, $a' = t'(\alpha' - 1) + s' - 1$ in $c' = \alpha'(t' + 1)$ res parametri, ki pripadajo komplementu točkovnega grafa. Po lemi 3.2.1 mora veljati $k' = n - k - 1$, $a' = n - 2k - 2 + c$ in $c' = n - 2k + a$, kar lahko preverimo z enostavnim premetavanjem danih enačb. $\square$

# Poglavje 4

# Razdaljno-regularni grafi

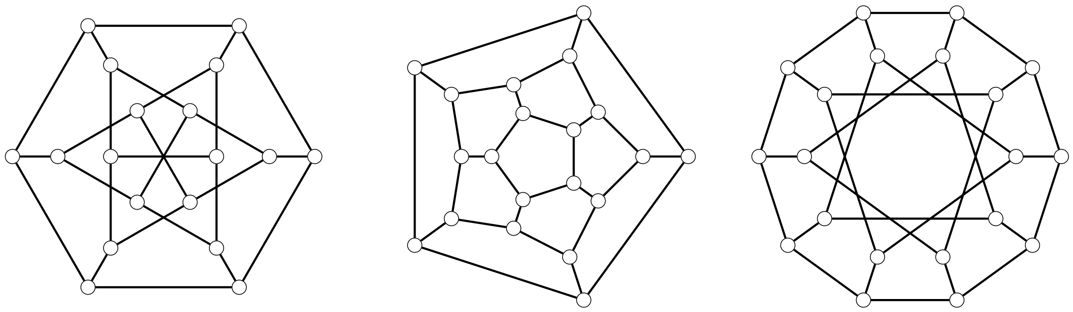
Razdaljno-regularni grafi so posplošitev krepko-regularnih grafov, ki smo jih spoznali v prejšnjem poglavju. Prvi jih je vpeljal Biggs okoli leta 1970 (glej npr. [3]). Po eni strani so na nastanek vplivale asociativne sheme, ki jih je preučeval Bose, po drugi strani pa tudi delo Schura in Wielandta na področju komutativne algebre.

V prvem razdelku bomo povedali osnovno definicijo razdaljno-regularnih grafov in pokazali nekaj primerov. Nato bomo v drugem razdelku spoznali kaj so to ekvitabilne particije in kakšno vlogo imajo pri razdaljno-regularnih grafih. V tretjem razdelku bomo vpeljali razdaljne matrike in povedali kakšne so njihove osnovne lastnosti. Nato bomo v četrtem razdelku definirali asociativne sheme in Kreinove parametre ter pokazali nekakšno dualnost med razdaljnimi matrikami in minimalnimi idempotenti. V petem razdelku bomo govorili o razdelitvi razdaljno-regularnih grafov na primitivne in neprimitivne grafe ter podali klasifikacijo slednjih. Nato bomo v šestem razdelku govorili o parametrih razdaljno-regularnih grafov. O lastnih vrednostih bomo nekaj več povedali v sedmem razdelku. Nato bomo v osmem razdelku spoznali še zaporedje kosinusov. Nazadnje bomo v devetem razdelku pogledali nekaj neskončnih družin razdaljno-regularnih grafov.

## 4.1 Definicije in primeri

Razdaljo med vozliščema $u$ in $v$ v grafu $G$ bomo označevali z $\mathrm{d}_G(u, v)$. Kadar ne bo dvoma za kateri graf gre, bomo oznako skrajšali v $\mathrm{d}(u, v)$. Množico vozlišč, ki so na razdalji $r$ od vozlišča $u$, bomo označevali s $S_r(u)$. Povezanemu grafu $G$ rečemo, da je **razdaljno-regularen**, če je za poljubni vozlišči $u$ in $v$ v grafu $G$ in poljubni naravni števili $i$ in $j$ vrednost $|S_i(u) \cap S_j(v)|$ odvisna le od razdalje $\mathrm{d}(u,v)$. Parametrom $p_{ij}^{\mathrm{d}(u,v)} = |S_i(u) \cap S_j(v)|$ rečemo **presečna števila**.

Nekaj primerov razdaljno-regularnih grafov je prikazanih na sliki 4.1.



Slika 4.1: Pappusov graf, dodekaeder in Desarguesov graf.

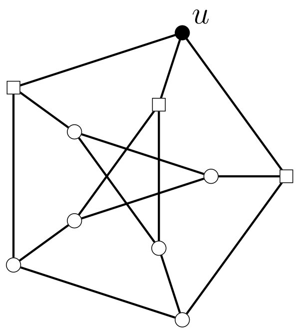
Poleg dodekaedra so tudi vsa ostala platonska telesa razdaljno-regularni grafi. Povezani krepko-regularni grafi, ki smo jih spoznali v prejšnjem poglavju, so razdaljno-regularni grafi s premerom 2. Torej poznamo že precej primerov razdaljno-regularnih grafov. Vendar ne bi bilo potrebe po novi definiciji, če ne bi obstajali tudi drugi razdaljno-regularni grafi. Tako predstavljajo **Johnsonovi grafi** $J(n,k)$ kar celo družino razdaljno-regularnih grafov. Vozlišča grafa $J(n,k)$ so podmnožice moči $k$ v množici moči $n$. Vozlišči sta povezani natanko tedaj, ko je presek pripadajočih podmnožic moči $k-1$. Lahko pokažemo še več. Če se podmnožici, ki pripadata vozliščema $u$ in $v$ v grafu $J(n,k)$ ujemata v $k-i$ elementih, velja $\mathrm{d}(u,v) = i$. Podobno dobimo, da je njihov premer enak $d = \min(k, n-k)$. Johnsonov graf $J(4,2)$ je tako oktaeder, ki smo ga spoznali na sliki 3.1.

## 4.2 Ekvitabilne particije

**Particija** $\pi$ grafa $G$ je množica nepraznih disjunktnih podmnožic množice vozlišč $V(G)$, katerih unija je $V(G)$. Elementom particije rečemo **celice** in jih označimo s $C_i$, za $i = 1, \ldots, n$, kjer je $n$ število celic. Particije, katerih celice vsebujejo le po en element, imenujemo **diskretne particije**. Particijam z le eno celico rečemo **trivialne particije**.

Particija $\pi = (C_1, \ldots, C_k)$ množice vozlišč $V(G)$ grafa $G$ je **ekvitabilna**, če je za poljubna $i$ in $j$ število sosedov, ki jih ima vozlišče $u$ iz celice $C_i$ v celici $C_j$, neodvisno od izbire vozlišča $u$ v celici $C_i$.

Za primer vzemimo Petersenov graf, ki je komplement Johnsonovega grafa $J(5, 2)$. Brez težav lahko preverimo, da je particija $\pi = (C_1, C_2, C_3)$ ekvitabilna, če postavimo v celico $C_1$ poljubno vozlišče $u$, v celico $C_2$ vse sosede $u$ in v celico $C_3$ vsa vozlišča, ki ležijo na razdalji dva do $u$.




Slika 4.2: Petersenov graf z označenimi celicami $C_1$, $C_2$ in $C_3$.

S pomočjo grup avtomorfizmov grafa $G$ dobimo še veliko drugih primerov. Naj bo $G$ graf in $\Gamma$ grupa avtomorfizmov grafa $G$. Potem je particija grafa $G$, ki jo določajo orbite $\Gamma$, ekvitabilna. To je posledica tega, da za poljubni vozlišči $u$ in $v$, ki pripadata isti celici particije, obstaja avtomorfizem v $\Gamma$, ki preslika $u$ v $v$. Ker avtomorfizem ohranja celice, sledi, da imata vozlišči $u$ in $v$ isto število sosedov v vsaki celici particije.

Podgraf grafa $G$, ki ga inducira celica ekvitabilne particije, je regularen graf, saj ima vsako vozlišče v celici isto število sosedov v njej. Podobno, če vzamemo dve različni celici ekvitabilne particije in ohranimo le povezave med njima, dobimo dvodelni graf. Vsa vozlišča v isti celici imajo tedaj enako stopnjo. Velja tudi obratno, da je particija z opisanima lastnostima ekvitabilna. Tako je diskretna particija vedno ekvitabilna, trivialna particija pa je ekvitabilna natanko tedaj, ko je graf $G$ regularen.

Vsaki celici $C_i$ particije $\pi = (C_1, \dots, C_k)$ grafa $G$ na $n$ vozliščih lahko priredimo **karakteristični vektor**. To je binarni stolpični $n$-dimenzionalen vektor, ki ima na mestu $j$ enico natanko tedaj, ko je vozlišče $j$ v celici $C_i$. Karakteristične vektorje vseh celic lahko zložimo v **karakteristično matriko** $P$.

**Lema 4.2.1** *Naj bo $\pi$ particija množice vozlišč grafa $G$ s karakteristično matriko $P$ in naj bo $A$ matrika sosednosti grafa $G$. Potem je $\pi$ ekvitabilna natanko tedaj, ko obstaja taka matrika $B$, da velja $AP = PB$.*

**Dokaz.** ($\Rightarrow$) V produktu $AP$ je na mestu $ij$ število vozlišč v celici $C_j$, ki so sosednja z $i$. Vemo, da je $\pi$ ekvitabilna natanko tedaj, ko to število ni odvisno od vozlišča $i$, ampak od celice, v kateri $i$ leži. Torej so stolpci produkta $AP$ konstantni glede na celice, kar pomeni, da so linearne kombinacije stolpcev iz matrike $P$. Torej res obstaja taka matrika $B$, da velja $AP = PB$.

($\Leftarrow$) Naj bo sedaj $B$ taka matrika, da velja $AP = PB$. Potem so stolpci produkta $AP$ linearne kombinacije stolpcev karakteristične matrike $P$. Element na $ij$-tem mestu lahko izrazimo kot

$$(AP)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} P_{rj} = \sum_{r \sim i} P_{rj}.$$

Torej je enak številu sosedov vozlišča $i$, ki ležijo v celici $C_j$. Ker so stolpci matrike $AP$ konstantni glede na celice particije $\pi$, je število $(AP)_{ij}$ odvisno le od celice v kateri leži vozlišče $i$. Torej je $\pi$ res ekvitabilna. □

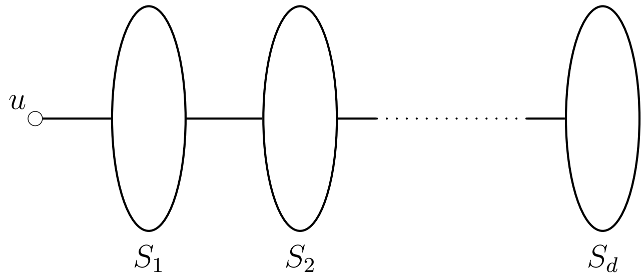
**Lema 4.2.2** *Naj bo $\pi = (C_1, \dots, C_k)$ particija množice vozlišč grafa $G$ s karakteristično matriko $P$ in naj bo $A$ matrika sosednosti grafa $G$. Naj velja še $AP = PB$ za neko matriko $B$. Potem so lastne vrednosti $k \times k$ matrike $B$ tudi lastne vrednosti $n \times n$ matrike $A$.*

**Dokaz.** Naj bo $\lambda$ lastna vrednost matrike $B$ in $x \neq 0$ pripadajoči lastni vektor. Potem lahko zapišemo $Bx = \lambda x$ in imamo

$$APx = PBx = \lambda Px.$$

Torej je $\lambda$ res lastna vrednost matrike $A$. $\square$

Pri razdaljno-regularnem grafu $G$ lahko definiramo razdaljno particijo $\pi(u)$ glede na izbrano vozlišče $u$ tako, da v isto celico particije zberemo vozlišča, ki so enako oddaljena od $u$. Če označimo premer grafa $G$ z $d$, imamo tako $d+1$ celic te particije. Jasno je, da so med sabo povezane samo zaporedne celice, saj bi drugače po trikotniški neenakosti prišli do protislovja z definicijo množice $S_i$.




Slika 4.3: Razdaljna particija $\pi(u)$.

Iz definicije razdaljno-regularnega grafa sledi, da je njegova pripadajoča razdaljna particija $\pi(u)$ ekvitabilna ne glede na to, katero vozlišče $u$ si izberemo. Podobno kot razdaljne particije, lahko definiramo tudi razdaljne matrike, o katerih bomo več povedali v naslednjem poglavju.

## 4.3 Razdaljne matrike

Za poljuben graf $G$ na $n$ vozliščih definiramo **$r$-to razdaljno matriko** $A_r$ kot binarno $n \times n$ matriko, ki ima na mestu $uv$ enico natanko tedaj, ko sta vozlišči $u$ in $v$ na razdalji $r$ v $G$. Matrika $A_0$ je tako kar identična matrika. Če je $r$ večji od premera grafa $G$, pa naj velja $A_r = 0$. Tako element na mestu $uv$ v matriki $A_iA_j$ predstavlja število vozlišč, ki so oddaljena za $i$ od vozlišča $u$ in za $j$ od vozlišča $v$. Torej lahko tudi definicijo razdaljno-regularnih grafov prevedemo v jezik matrik.

**Lema 4.3.1** *Graf $G$ s premerom $d$ je razdaljno-regularen natanko tedaj, ko je za poljubna $i, j \in \{0, \dots, d\}$ produkt $A_iA_j$ linearna kombinacija matrik $A_0, \dots, A_d$.*

**Dokaz.** ($\Rightarrow$) Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf in naj bosta $u$ in $v$ njegovi vozlišči na razdalji $r = \mathrm{d}(u, v)$. V produktu razdaljnih matrik $A_i$ in $A_j$ na mestu $uv$ nastopa število vozlišč, ki so oddaljena za $i$ od vozlišča $u$ in za $j$ od $v$. To pa je ravno presečno število $p^r_{ij}$, ki je v razdaljno-regularnem grafu odvisno le od razdalje $r$. Torej lahko produkt $A_iA_j$ zapišemo kot linearno kombinacijo

$$A_iA_j = \sum_{r=0}^{d} p^r_{ij} A_r. \tag{4.1}$$

($\Leftarrow$) Naj bo sedaj produkt $A_iA_j$ linearna kombinacija matrik $A_0, \ldots, A_d$. To pa ravno pomeni, da je število vozlišč, ki so oddaljena za $i$ od vozlišča $u$ in za $j$ od $v$ odvisno le od razdalje $\mathrm{d}(u, v)$. Torej je graf $G$ res razdaljno-regularen. □

Za povezane grafe lahko zgornjo lemo še malo poenostavimo.

**Trditev 4.3.2** *Naj bo $G$ povezan graf s premerom $d$. Potem je $G$ razdaljno-regularen natanko tedaj, ko je za $i = 1, \ldots, d$ produkt $A_1A_i$ linearna kombinacija matrik $A_{i-1}$, $A_i$ in $A_{i+1}$.*

**Dokaz.** ($\Rightarrow$) Naj bo graf $G$ razdaljno-regularen. Potem je po lemi 4.3.1 produkt $A_1A_i$ linearna kombinacija razdaljnih matrik $A_r$

$$A_1A_i = \sum_{r=0}^{d} p^r_{1i} A_r.$$

Po trikotniški neenakosti so presečna števila $p^r_{1i}$ neničelna le, če je $i - 1 \leq r \leq i + 1$. Torej je $A_1A_i$ res linearna kombinacija razdaljnih matrik $A_{i-1}$, $A_i$ in $A_{i+1}$.

($\Leftarrow$) Najprej opazimo, da je za vsak $i < d$ koeficient pri $A_{i+1}$ v linearni kombinaciji produkta $A_1A_i$ neničelen. Torej je $A_{i+1}$ linearna kombinacija matrik $A_{i-1}$, $A_i$ in $A_1A_i$. Če to nadaljujemo z indukcijo, dobimo, da je $A_i$ polinom stopnje $i$ v spremenljivki $A_1$, za $i = 1, \ldots, d$. Po lemi 4.3.1 je dovolj pokazati, da je za poljubna $i$ in $j$ produkt $A_iA_j$ linearna kombinacija razdaljnih matrik. Pišimo namesto $A_i$ polinom v spremenljivki $A_1$. Sedaj lahko zopet z indukcijo pokažemo, da je produkt $A_1^kA_j$ linearna kombinacija razdaljnih matrik za poljuben $k = 1, \ldots, i$. □

Za konec si poglejmo še eno lemo, ki povzame nekaj lastnosti razdaljnih matrik razdaljno-regularnega grafa $G$.

**Lema 4.3.3** *Naj bo graf $G$ razdaljno-regularen s premerom $d$ in naj bodo $A_0, \ldots, A_d$ njegove razdaljne matrike. Potem velja*

*(i)* $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,

*(ii) matrike $A_i$ so simetrične za $i = 0, \ldots, d$,*

*(iii) $A_i A_j = A_j A_i$ za vse $i$ in $j$,*

**Dokaz.** Prvi dve lastnosti sta enostavni posledici definicije razdaljnih matrik. Edina lastnost, ki še preostane, je lastnost (iii). Ker je produkt $A_i A_j$ linearna kombinacija simetričnih matrik $A_0, \ldots, A_d$, je tudi sam simetričen. Vemo pa, da je produkt dveh simetričnih matrik simetričen natanko tedaj, ko matriki komutirata. $\square$

Naj bo $V(G)$ množica vozlišč grafa $G$. Potem razdaljne matrike tvorijo bazo komutativne podalgebre $\mathcal{M}$ algebre matrik s kompleksnimi elementi $Mat_{V(G)}(\mathbb{C})$. Algebri $\mathcal{M}$ rečemo **Bose-Mesnerjeva algebra**.

## 4.4 Asociativne sheme

V tem poglavju bomo spoznali samo nekatere osnovne lastnosti asociativnih shem, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. **Asociativna shema** z $d$ razredi je množica $n \times n$ razsežnih binarnih matrik $A_0, \ldots, A_d$, za katere velja:

(i) $A_0 = I$,

(ii) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,

(iii) $A_i^T = A_i$,

(iv) za poljubna $i, j \in \{0, \ldots, d\}$ je produkt $A_i A_j$ linearna kombinacija matrik $A_0, \ldots, A_d$.

Primer asociativne sheme z $d$ razredi so kar razdaljne matrike razdaljno-regularnega grafa $G$ s premerom $d$, ki smo jih spoznali v prejšnjem razdelku.

Naj bodo $E_0, \dots, E_d$ minimalni idempotenti Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$. Označimo s $\circ$ istoležno množenje matrik $A$ in $B$, tj.

$$(A \circ B)_{ij} = A_{ij} B_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

ki mu rečemo tudi **Schurovo množenje**. Ker matrike $E_i$ predstavljajo bazo za $\mathcal{M}$, lahko zapišemo

$$E_i \circ E_j = \sum_{h=0}^{d} q_{ij}^h E_h, \tag{4.2}$$

kjer so $q_{ij}^h$ neka fiksna števila, ki jim rečemo **Kreinovi parametri**. Le-ti niso nujno cela števila. Definirajmo še **kroneckerjev produkt** matrik $A$ in $B$, ki ga označimo z $\otimes$. Produkt $A \otimes B$ dobimo tako, da vsako komponento $a_{ij}$ matrike $A$ nadomestimo z $a_{ij}B$. Iz dejstva, da so lastne vrednosti Kroneckerjevega produkta $E_i \otimes E_j$ enake nič ali ena, sledi, da so Kreinovi parametri vedno nenegativni.

Naj bo $A$ simetrična $n \times n$ razsežna matrika in naj njeni lastni vrednosti $\lambda$ z večkratnostjo $m_\lambda$ pripadajo neničelni ortonormirani lastni vektorji $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_{m_\lambda}}$. Definirajmo matriko $E_\lambda = U_\lambda U_\lambda^T$, kjer smo v matriko $U_\lambda = [\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_{m_\lambda}}]^T$ zložili lastne vektorje. Računajmo sedaj

$$(U_\lambda^T U_\lambda)_{xy} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}},$$

kjer smo z $\delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ označili Kroneckerjev delta. Torej je produkt $U_\lambda^T U_\lambda$ enak $m_\lambda \times m_\lambda$ razsežni identiteti $I$. Potem imamo

$$E_\lambda^2 = U_\lambda (U_\lambda^T U_\lambda) U_\lambda^T = E_\lambda$$

in matrika $E_\lambda$ je idempotent. Če si izberemo še lastno vrednost $\mu$, ki je različna od $\lambda$, dobimo

$$E_\lambda E_\mu = U_\lambda (U_\lambda^T U_\mu) U_\mu^T = 0.$$

Ker je matrika $U_\lambda$ sestavljena iz lastnih vektorjev, ki pripadajo $\lambda$, velja $AU_\lambda = \lambda U_\lambda$ in če to enačbo pomnožimo z desne z $U_\lambda^T$, dobimo $AE_\lambda = \lambda E_\lambda$. Če to zvezo $(r-1)$-krat pomnožimo iz leve z $A$, dobimo

$$A^r E_\lambda = \lambda^r E_\lambda. \tag{4.3}$$

Nadalje si lahko pogledamo čemu je enaka vsota matrik $\sum_\lambda E_\lambda$, kjer seštevamo po vseh lastnih vrednostih matrike $A$.

$$\left(\sum_\lambda E_\lambda\right)^2 = \sum_\lambda E_\lambda^2 = \sum_\lambda E_\lambda,$$

torej je vsota vseh idempotentov $E_\lambda$ tudi idempotent in ima zato za lastne vrednosti lahko le ničle in enke. Zaradi

$$\operatorname{sled}\left(\sum_\lambda E_\lambda\right) = \sum_\lambda \operatorname{sled}(E_\lambda) = \sum_\lambda m_\lambda = n,$$

morajo biti vse lastne vrednosti matrike $\sum_\lambda E_\lambda$ enake ena in dobimo $\sum_\lambda E_\lambda = I$. Naj bo sedaj še $p(x)$ poljuben polinom. Potem iz enačbe (4.3) sledi

$$p(A) = \sum_\lambda p(\lambda) E_\lambda. \tag{4.4}$$

Če si izberemo polinom $p(x) = x$, dobimo zvezo med matriko $A$ in matrikami $E_\lambda$

$$A = \sum_\lambda \lambda E_\lambda.$$

Tako smo pokazali, da lahko poljubno razdaljno matriko $A_i$ razdaljno-regularnega grafa $G$ zapišemo kot linearno kombinacijo idempotentov $E_i$

$$A_i = \sum_{h=0}^{d} \mu_{hi} E_h,$$

kjer smo z $\mu_{hi}$ označili $h$-to lastno vrednost matrike $A_i$. Podobno lahko izrazimo tudi matrike $E_i$ kot

$$E_i = \sum_{h=0}^{d} \lambda_{hi} A_h,$$

kjer smo z $\lambda_{hi}$ označili $h$-to lastno vrednost matrike $E_i$. Pokazali smo tudi, da obstaja nekakšna dualnost med razdaljnimi matrikami $A_i$, presečnimi števili $p_{ij}^h$ in matričnim množenjem na eni strani ter idempotenti $E_i$, Kreinovimi parametri $q_{ij}^h$ in Schurovim množenjem na drugi strani.

## 4.5 Primitivnost in neprimitivnost

Podobno kot pri krepko-regularnih grafih, lahko tudi pri razdaljno-regularnih grafih govorimo o primitivnosti oziroma neprimitivnosti. Naj bodo $G_1, \ldots, G_d$ grafi, katerih matrike sosednosti so zaporedoma razdaljne matrike $A_1, \ldots, A_d$. Torej je $G_1$ enak originalnemu razdaljno-regularnemu grafu $G$. Grafom $G_i$ rečemo **razdaljni grafi** grafa $G$.

Razdaljno-regularen graf $G$ je **primitiven**, če so vsi njegovi razdaljni grafi $G_i$ povezani. Če je premer grafa $G$ enak $d = 2$, to ravno sovpada z definicijo primitivnosti pri krepko-regularnih grafih. Razdaljno-regularnim grafom, ki niso primitivni, rečemo **neprimitivni** razdaljno-regularni grafi.

Če je graf $G$ dvodelen, njegov razdaljni graf $G_2$ ni povezan, torej je $G$ neprimitiven. Preden si pogledamo karakterizacijo neprimitivnih razdaljno-regularnih grafov, moramo povedati še kaj so to antipodni grafi. Naj bo $u$ poljubno vozlišče v grafu $G$ s premerom $d$. Če so vsa vozlišča, ki so od $u$ oddaljena za $d$, tudi med sabo oddaljena za $d$, rečemo, da je $G$ **antipodni graf**. Za dokaz naslednjega izreka glej [10, str. 202].

**Izrek 4.5.1** *Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s stopnjo $k \geq 3$. Če je $G$ neprimitiven, je ali dvodelen ali antipoden graf.* □

Ker bomo antipodne grafe spoznali v naslednjem poglavju, si poglejmo le kaj še lahko povemo o dvodelnih razdaljno-regularnih grafih.

**Izrek 4.5.2** *Naj bo $G$ dvodelen razdaljno-regularen graf s premerom $d$. Potem sta obe komponenti razdaljnega grafa $G_2$ razdaljno-regularni in imata premer $\lfloor d/2 \rfloor$. Če $G$ ni cikel, potem komponenti nista dvodelni.* □

## 4.6 Parametri

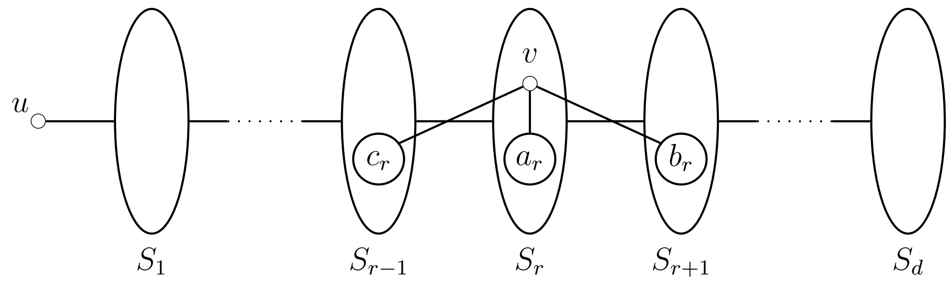
Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s stopnjo $k$ in premerom $d$. Naj bosta še $u$ in $v$ vozlišči na razdalji $r$ v grafu $G$. Že na začetku poglavja smo omenili presečne parametre $p^r_{ij} = |S_i(u) \cap S_j(v)|$. Ker so indeksi $i$, $j$ in $r$ elementi množice $\{0, \ldots, d\}$, imamo lahko v splošnem $(d+1)^3$ različnih parametrov. Izkaže se, da lahko v razdaljno-regularnih grafih vse parametre izrazimo samo s pomočjo $2d-1$ parametrov.

Naj bo v presečnem številu $p^r_{ij}$ indeks $j=1$. Torej je $p^r_{i1}$ število vseh vozlišč, ki so sosednja $v$ in so za $i$ oddaljena od $u$. Ker sta vozlišči $u$ in $v$ med sabo oddaljeni za $r$, je zaradi trikotniške neenakosti $p^r_{i1} \neq 0$ samo, kadar je $i \in \{r-1, r, r+1\}$. Vsa ostala presečna števila so tako enaka 0.

S $k_r$ označimo število vozlišč, ki so od vozlišča $u$ oddaljena za $r$. S $c_r$, $a_r$ in $b_r$ pa označimo število vozlišč, ki so sosednja vozlišču $v$ in zaporedoma oddaljena za $r-1$, $r$ in $r+1$ od vozlišča $u$. Če povzamemo, imamo

$$p^r_{i1} = \begin{cases} c_r, & \text{za } i = r-1, \\ a_r, & \text{za } i = r, \\ b_r, & \text{za } i = r+1, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poglejmo si, kako je to videti na razdaljni particiji grafa $G$.

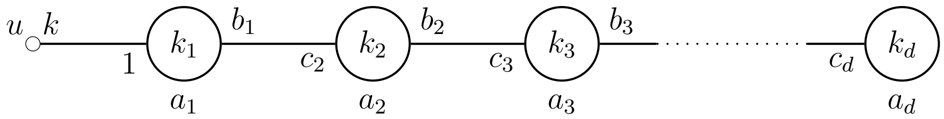



Slika 4.4: Parametri $a_r$, $b_r$ in $c_r$ razdaljno-regularnega grafa.

Jasno je, da vrednosti $a_r$, $b_r$, $c_r$ in $k_r$ niso odvisne od naše izbire vozlišč $u$ in $v$. Podobno vidimo, da velja

$$a_r + b_r + c_r = k. \tag{4.5}$$

Nadalje imamo še $b_0 = k$, $c_1 = 1$ in $a_0 = c_0 = b_d = 0$. Iz definicije parametrov sledi, da morajo biti preostali parametri $c_r$ in $b_r$ neničelni, saj bi sicer prišli v protislovje s povezanostjo grafa $G$. O parametrih $a_r$ pa kaj takega ne moremo trditi.




Slika 4.5: Parametri razdaljno-regularnega grafa.

Parametre $a_r$, $b_r$ in $c_r$ lahko zložimo v tridiagonalno matriko

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & & \\ & c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{d-1} & a_{d-1} & b_{d-1} \\ & & & & c_d & a_d \end{pmatrix}.$$

Če upoštevamo še enačbo (4.5), lahko isto informacijo zapišemo v malo bolj kompaktni obliki

$$\{b_0 = k, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1 = 1, c_1, \ldots, c_d\},$$

ki ji rečemo **presečno zaporedje**. Ker je parameter $c_1$ vedno enak 1, ponavadi rečemo, da imamo $2d - 1$ parametrov, kot smo napovedali že v uvodu razdelka. Opisani parametri razdaljno-regularnih grafov imajo mnoge zanimive lastnosti.

**Lema 4.6.1** *Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s stopnjo $k$ in premerom $d$. Potem velja*

*(i)* $k_{i-1}b_{i-1} = k_i c_i$,

*(ii)* *če je $k_i$ lih, je $a_i$ sod,*

*(iii)* $1 = c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_d$,

*(iv)* $k = b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_{d-1}$,

*(v)* *če je $i + j \leq d$, potem je $c_j \leq b_i$.*

**Dokaz.** Izberimo si vozlišče $u$ v grafu $G$. Da dobimo točko (i), preštejmo število povezav, ki povezujejo vozlišča iz $S_{i-1}(u)$ z vozlišči iz $S_i(u)$. Po eni strani imamo

$k_{i-1}$ vozlišč v $S_{i-1}(u)$ in vsako ima $b_{i-1}$ sosedov v $S_i(u)$. po drugi strani pa imamo $k_i$ vozlišč v $S_i(u)$ in vsako ima $c_i$ sosedov v $S_{i-1}(u)$.

Za dokaz točke (ii) opazimo, da je podgraf grafa $G$, ki ga inducirajo vozlišča iz $S_i(u)$, regularen s stopnjo $a_i$ in ima $k_i$ vozlišč. Torej mora biti po lemi o rokovanju produkt $a_i k_i$ sod.

Za dokaz točke (iii) si izberimo točko $w$ iz $S_{i+1}(u)$. Naj bo še $v$ vozlišče iz $S_i(w)$, ki je sosednje točki $u$. Potem je $w \in S_i(v)$ in je vsako vozlišče, ki je sosednje z $w$ in je na razdalji $i-1$ od $v$, na razdalji $i$ od $u$. Torej je presek $S_1(w) \cap S_{i-1}(v)$, ki ima $c_i$ elementov, podmnožica množice $S_1(w) \cap S_i(u)$ s $c_{i+1}$ elementi. Na podoben način dokažemo tudi točko (iv).

Naj bosta zdaj točki $v$ in $w$ zaporedoma oddaljeni za $i$ oziroma $j$ od točke $u$ in na razdalji $i+j$ med sabo. Potem je vsako vozlišče, ki leži na razdalji $j-1$ od $w$ in je sosednje $u$, oddaljeno za $i+1$ od $v$. Torej je $c_j \leq b_i$ in točka (v) je dokazana. □

Tudi o zaporedju parametrov $a_i$ lahko povemo kako se obnaša. Za dokaz naslednje leme glej [6, 5.5.7].

**Lema 4.6.2** *Naj bo $G$ nedvodelen razdaljno-regularen graf. Potem obstajata indeksa $i_1$ in $i_2$, da je $a_r \neq 0$ natanko tedaj, ko je $i_1 \leq r \leq i_2$. Velja še $i_1 + i_2 \geq d$.* □

Nadalje si poglejmo kaj lahko povemo o zaporedju $k_0, \ldots, k_d$.

**Trditev 4.6.3** *Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s premerom $d$. Potem je zaporedje $k_0, \ldots, k_d$ unimodalno (tj. obstaja tak indeks $t$, da velja $k_0 \geq k_1 \geq \cdots \geq k_t$ in $k_t \leq k_{t+1} \leq \cdots \leq k_d$).*

**Dokaz.** Iz točk (iii) in (iv) v lemi 4.6.1 sledi, da je zaporedje $b_0/c_1, \ldots, b_{d-1}/c_d$ padajoče. Po točki (i) iste leme pa velja $k_i = k_{i-1}(b_{i-1}/c_i)$ in trditev sledi. □

Naslednja trditev nam bo povedala še malo več o členih zaporedja $k_i$.

**Trditev 4.6.4** *Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s premerom $d$. Če je $2i \leq d$, potem velja $k_i \leq k_{d-i}$.*

**Dokaz.** Če induktivno uporabimo točko (i) leme 4.6.1, dobimo

$$k_j = k_i \frac{b_i \cdots b_{j-1}}{c_j \cdots c_{i+1}} \qquad \text{za } j > i. \tag{4.6}$$

Če je $i + j \leq d$, imamo po točki (v) $b_{i+s} \geq c_{j-s}$ za $s = 0, \ldots, j - i - 1$. Torej zaradi enačbe (4.6) velja $k_j \geq k_i$. Sedaj namesto $j$ vzamemo $d - i$ in trditev je dokazana. □

## 4.7 Lastne vrednosti

Matrika sosednosti $A(G)$ razdaljno-regularnega grafa $G$ s premerom $d$ ima vsaj $d+1$ različnih lastnih vrednosti (glej [10, 2.5.2]). Naslednja lema nam bo pokazala, da imajo razdaljno-regularni grafi natanko $d + 1$ lastnih vrednosti.

**Lema 4.7.1** *Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s premerom $d$. Potem ima matrika sosednosti $A$ natanko $d + 1$ različnih lastnih vrednosti.*

**Dokaz.** Dokazati moramo le, da razdaljno-regularni grafi ne morejo imeti več kot $d + 1$ lastnih vrednosti. Razdaljne matrike $A_i$ za $i = 0, \ldots, d$ lahko zapišemo kot polinome v spremenljivki $A$, ki so med sabo linearno neodvisni. Ker je $p_{d+1}(A) = A_{d+1} = 0$ mora imeti razdaljno-regularen graf $G$ natano $d + 1$ različnih lastnih vrednosti, ki so ravno ničle polinoma $p_{d+1}(x)$. □

Označimo lastne vrednosti s $\vartheta_0 > \vartheta_1 > \cdots > \vartheta_d$. Za vsako lastno vrednost $\vartheta$ lahko zapišemo

$$\vartheta p_i(\vartheta) = c_{i+1} p_{i+1}(\vartheta) + a_i p_i(\vartheta) + b_{i-1} p_{i-1}(\vartheta), \qquad \text{za } i = 0, \ldots, d, \tag{4.7}$$

kjer sta $b_{-1}$ in $c_{d+1}$ nedefinirana. A to nič ne moti, ker ju tako uničimo s $p_{-1}(\vartheta)$ in $p_{d+1}(\vartheta)$, ki sta enaka 0. Stopnja $k$ je vedno lastna vrednost razdaljno-regularnega grafa, ki ji pripada lastni vektor $\boldsymbol{j} = (1, \ldots, 1)^T$. S pomočjo leme 4.6.1 lahko preverimo, da velja $p_i(k) = k_i$. Tako pridemo na idejo, da bi vpeljali normirane vrednosti

$$q_i(\vartheta) = \frac{v_i(\vartheta)}{k_i}, \qquad \text{za } i = -1, \ldots, d + 1. \tag{4.8}$$

Dobljeno zaporednje brez začetnega in končnega člena imenujemo **standardno zaporedje** razdaljno regularnega grafa $G$, glede na lastno vrednost $\vartheta$. V primeru, ko vzamemo za lastno vrednost stopnjo $k$, dobimo zaporedje samih enic.

Podobno kot za $p_i(\vartheta)$ velja tudi rekurzivna zveza za $q_i(\vartheta)$. Tako je $u_{-1}(\vartheta) = 0$, $u_0(\vartheta) = 1$, $u_1(\vartheta) = \vartheta/k$ in

$$\vartheta q_i(\vartheta) = c_i q_{i-1}(\vartheta) + a_i q_i(\vartheta) + b_i q_{i+1}(\vartheta), \qquad \text{za } i = 0, \dots, d, \tag{4.9}$$

Ta rekurzivna zveza pa nam pove, da so lastne vrednosti matrike sosednosti $A$ kar lastne vrednosti tridiagonalne matrike

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{d-1} & a_{d-1} & b_{d-1} \\ & & & c_d & a_d \end{pmatrix}.$$

Lastni vektor te matrike je $\boldsymbol{q} = (q_0(\vartheta), \dots, q_d(\vartheta))^T$.

## 4.8 Zaporedje kosinusov

Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf z $n$ vozlišči in $A$ njegova matrika sosednosti. Definirajmo matriki $U_\lambda$ in $E_\lambda$ kot smo to storili v razdelku 4.4, ko smo govorili o asociativnih shemah. Označimo $i$-to vrstico matrike $U_\lambda$ z $u_\lambda(i)$. Ker so komponente matrike $E_\lambda$ skalarni produkti $\langle u_\lambda(i), u_\lambda(j)\rangle$, lahko $ij$-to komponento matrike $A^r$ s pomočjo enačbe (4.4) zapišemo kot

$$(A^r)_{ij} = \sum_\lambda \langle u_\lambda(i), u_\lambda(j)\rangle \lambda^r. \tag{4.10}$$

Po drugi strani pa vemo, da za poljuben $t \in \{0, \dots, d\}$ obstajajo konstante $c_h(t)$, da velja

$$A^t = \sum_{h=0}^{d} c_h(t) A_h.$$

Fiksirajmo vozlišči $i$ in $j$ v grafu $G$ in označimo njuno razdaljo z $\ell = \mathrm{d}(i,j)$. Potem velja

$$\sum_{\lambda} \langle u_\lambda(i), u_\lambda(j)\rangle \lambda^t = (A^t)_{ij} = \left(\sum_{h=0}^{d} c_h(t) A_h\right)_{ij} = c_\ell(t).$$

Lema 4.7.1 nam pove, da ima razdaljno-regularen graf $G$ natanko $d+1$ lastnih vrednosti. Determinanta dobljenega sistema $d+1$ enačb z $d+1$ neznankami je kar determinanta Vandermondove matrike in je enaka $\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)$. Torej so skalarni produkti $\langle u_\lambda(i), u_\lambda(j)\rangle$ odvisni le od razdalje $\ell$. Te skalarne produkte še normirajmo in jih označimo z $\omega_\ell$. Torej imamo

$$\omega_\ell = \frac{\langle u_\lambda(i), u_\lambda(j)\rangle}{\langle u_\lambda(i), u_\lambda(i)\rangle}. \tag{4.11}$$

Zaporedju $\omega_0, \ldots, \omega_d$ rečemo **zaporedje kosinusov**. Takoj vidimo, da je $\omega_0 = 1$, ker je vozlišče $i$ na razdalji nič od samega sebe. Poglejmo si, kako lahko izračunamo še preostale $\omega_i$. Najprej primerjajmo $i$-ti komponenti v enačbi $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Dobimo zvezo $\sum_{p\sim i} x_p = \lambda x_i$ in podobno

$$\sum_{p\sim i} u_\lambda(p) = \lambda\, u_\lambda(i). \tag{4.12}$$

Če enačbo (4.12) skalarno pomnožimo z $u_\lambda(j)$ in upoštevamo na kakšni razdalji so lahko točke $p$ od točke $j$, dobimo rekurzivno zvezo

$$c_\ell\, \omega_{\ell-1} + a_\ell\, \omega_\ell + b_\ell\, \omega_{\ell+1} = \lambda\, \omega_\ell. \tag{4.13}$$

Če vstavimo $\ell = 0$ v rekurzivno zvezo (4.13) in upoštevamo, da je $a_0 = c_0 = 0$, dobimo

$$\omega_1 = \frac{\lambda}{k}.$$

Podobno dobimo še

$$\omega_2 = \frac{\lambda(\lambda - a_1) - k}{b_1 k} = \frac{\lambda^2 - a_1\lambda - k}{b_1 k}$$

in nato še vse ostale $\omega_\ell$. Pri tem moramo pri $\ell = d$ upoštevati, da je po definiciji presečnih števil $b_d = 0$. V naslednjem poglavju bomo potrebovali razliki $\omega_1 - \omega_2$ in $1 - \omega_2$. Z malo računanja dobimo

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{(k-\lambda)(\lambda+1)}{kb_1} \qquad \text{in} \qquad 1 - \omega_2 = \frac{(k-\lambda)(\lambda+b_1+1)}{kb_1}. \tag{4.14}$$

## 4.9 Družine razdaljno-regularnih grafov

Če dobro pomislimo, vidimo, da smo spoznali že precej neskončnih družin razdaljno-regularnih grafov. Tako so razdaljno-regularni grafi s premerom $d = 1$ ravno polni grafi $K_n$. Za premer $d = 2$ smo že rekli, da so to krepko-regularni grafi. Pokazali smo tudi, da lahko poljuben posplošen četverokotnik predstavimo kot krepko-regularen graf, torej tudi vse neskončne družine, ki smo jih spoznali tam spadajo med razdaljno-regularne grafe. V tem razdelku si bomo pogledali konstrukcijo še ene neskončne družine razdaljno-regularnih grafov, ki ne spada v nobeno od naštetih kategorij.

Naj bo $r$ potenca praštevila in $H$ množica hermitskih $n \times n$ matrik nad vektorskim prostorom $\mathbb{F}_{r^2}$. Torej za matriko $A \in H$ velja $A = A^*$. Naj bo $G$ graf, ki ima za vozlišča elemente množice $H$. Naj bosta $A$ in $B$ matriki iz $H$. Potem sta njuni pripadajoči vozlišči v $G$ povezani natanko tedaj, ko je $\mathrm{Rang}(A - B) = 1$. Poglejmo si koliko vozlišč ima graf $G$. Matrika $A$ je $n \times n$ matrika nad vektorskim prostorom $\mathbb{F}_{r^2}$. Torej imamo za vsak njen element $r^2$ možnosti. A ker je $A$ sebi-adjungirana, si lahko poljubno izberemo le polovico elementov v njej. Ostali so namreč potem natanko določeni. Torej ima graf $r^{n^2}$ vozlišč. Premer grafa $G$ je enak $d = n$, saj je $\mathrm{Rang}(A - B) \leq n$. Torej pridemo v največ $n$ korakih od vozlišča $A$ do vozlišča $B$. V [6] najdemo dokaz, da je potem $G$ razdaljno-regularen graf, s presečnim zaporedjem $\{b_0, \ldots, b_{n-1}; c_1, \ldots, c_n\}$, kjer so parametri $b_i$ in $c_i$ enaki

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{r^{2n} - r^{2i}}{r + 1}, \\ c_i &= \frac{r^{2i} - (-r)^i}{r(r + 1)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Nekateri manjši grafi, ki jih dobimo, so med drugim tesno povezani z Golayevimi kodami.

# Poglavje 5

# Antipodni razdaljno-regularni grafi

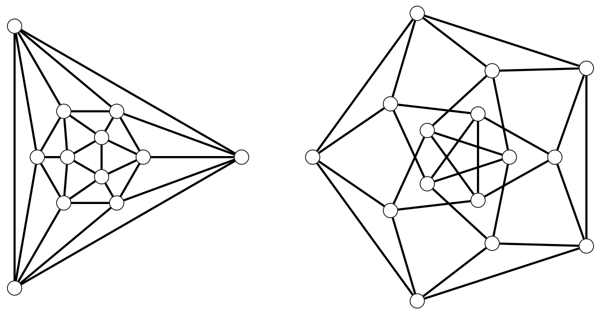
V tem poglavju se bomo spoznali z antipodnimi razdaljno-regularnimi grafi in tesnimi grafi, ki so jih uvedli Jurišić, Koolen in Terwilliger leta 2000.

V prvem razdelku bomo navedli nekaj osnovnih definicij in si pogledali dva primera antipodnih grafov. V drugem razdelku bomo govorili o antipodnih krovih razdaljno-regularnih grafov. V tretjem razdelku pa bomo spoznali tesne in Smithove grafe. Tukaj bomo tudi poiskali vse celoštevilske točke na eliptični krivulji $y^2 = 4w^3 + (w+1)^2$ in videli, da točkovni graf posplošenega četverokotnika $GQ(w, w^2)$ nima razdaljno-regularnega antipodnega krova.

## 5.1 Definicije in primeri

Naj bo $u$ poljubno vozlišče v grafu $G$ s premerom $d$. Spomnimo se, da so v antipodnem grafu vsa vozlišča, ki so od $u$ oddaljena za $d$, tudi med seboj oddaljena za $d$. Tedaj je relacija "biti na razdalji $d$ ali nič" ekvivalenčna. Njenim ekvivalenčnim razredom rečemo **antipodni razredi**. Primera antipodnih grafov sta ikozaeder in graf povezav Petersenovega grafa, ki ju vidimo na sliki 5.1.

Podgrafu, ki ga inducirajo sosedi vozlišča $u$ iz grafa $G$, rečemo **lokalni graf** in ga označimo s $\Delta(u)$. Naj bo sedaj $\pi$ taka particija grafa $G$, da med dvema celicama ni ali nobene povezave, ali pa obstaja popolno prirejanje. Naj bo $G/\pi$



Slika 5.1: Ikozaeder in graf povezav Petersenovega grafa.

graf, ki ima za vozlišča celice particije $\pi$, in povezave med celicami, med katerimi obstaja popolno prirejanje. Potem rečemo, da je graf $G$ **krov** grafa $G/\pi$. Celicam rečemo **vlakna vozlišč**, popolnim prirejanjem pa **vlakna povezav**. Če je graf $G/\pi$ povezan, imajo vse celice enako število vozlišč, ki mu rečemo **krovni indeks** in ga ponavadi označimo z $r$.

## 5.2 Antipodni krovi

Naj bo $G$ antipoden graf in naj bo $\pi$ particija grafa $G$ na antipodne razrede. Potem rečemo, da je $G$ **antipodni krov** grafa $G/\pi$. Če je graf $G$ razdaljno-regularen, rečemo, da je **razdaljno-reglaren antipodni krov** grafa $G/\pi$. Antipodni kvocient $Q$ grafa $G$ ima za vozlišča antipodne razrede grafa $G$. Dve vozlišči v njem sta povezani natanko tedaj, ko obstaja povezava med pripadajočima antipodnima razredoma. Dokaz naslednje leme je v [13, 2.3].

**Lema 5.2.1** *Razdaljno-regularen antipodni graf $G$ s premerom $d$ je krov svojega antipodnega kvocienta, katerega vlakna so antipodni razredi $G_d$, razen če je $d = 2$. Matrika sosednosti graf $G_d$ je razdaljna matrika $A_d$.* □

Primer razdaljno-regularnega antipodnega grafa s premerom $d = 2$, za katerega lema 5.2.1 ne drži, je kar oktaeder. V vsako celico ekvitabilne particije $\pi$ postavimo točki, ki sta si v grafu antipodni, torej ležita na razdalji 2. Potem je njegov kvocient $G/\pi$ kar trikotnik. Ampak med poljubnima celicama ekvitabilne particije $\pi$ nimamo popolnega prirejanja, saj je oktaeder poln večdelen graf $K_{2,2,2}$.

Za vsako vozlišče $u$ v krovu $H$ označimo vlakno, ki vsebuje $u$, s $F(u)$. Poti $g_0, \ldots, g_t$ v grafu $G$ z $\mathrm{d}(g_0, g_t) = t$ rečemo **geodetka**. Naslednja trditev, katere dokaz je v [14, 2.4.2], nam pove, da so v razdaljno-regularnem grafu vsa vlakna enake velikosti, ker je med dvema vlaknoma popolno prirejanje ali pa nista povezana.

**Trditev 5.2.2** *Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s premerom $d$ in $H$ njegov $r$-listen krov s premerom $D > 2$. Potem so naslednje izjave ekvivalentne:*

*(i) Graf $H$ je antipoden. Njegova vlakna so antipodni razredi in vsako geodetko v $H$ velikosti vsaj $\lfloor (D+1)/2 \rfloor$ lahko podaljšamo v geodetko dolžine $D$.*

*(ii) Za poljubno vozlišče $u$ v $H$ in poljuben $i \in \{0, \ldots, \lfloor D/2 \rfloor\}$ velja*

$$S_{D-i}(u) = \bigcup \{F(v) \backslash v; v \in S_i(u)\}.$$

*(iii) Graf $H$ je razdaljno-regularen s premerom $D \in \{2d, 2d+1\}$. Njegova presečno zaporedje je za $D = 2d$ oblike*

$$\{b_0, \ldots, b_{d-1}, c_d(r-1)/r, c_d, \ldots, c_1; c_1, \ldots, c_{d-1}, c_d/r, b_{d-1}, \ldots, b_0\},$$

*za $D = 2d + 1$ pa*

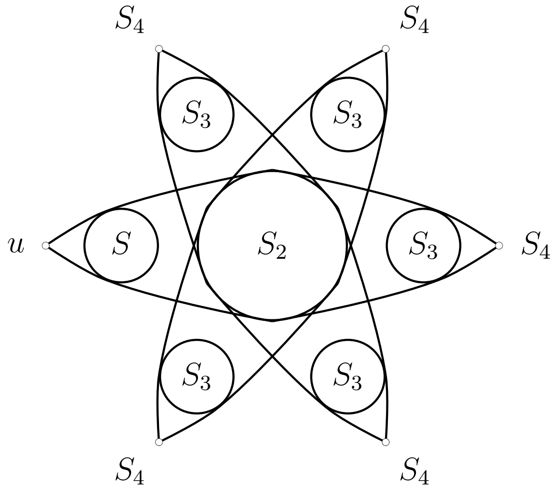
$$\{b_0, \ldots, b_{d-1}, (r-1)t, c_d, \ldots, c_1; c_1, \ldots, c_d, t, b_{d-1}, \ldots, b_0\},$$

*za neko celo število $t$.* □

Za ilustracijo si poglejmo kako izgleda razdaljna particija razdaljno-regularnega grafa $G$, s premerom $d = 4$, glede na antipodni razred.

S pomočjo trditve 5.2.2 lahko izračunamo parametre krova iz parametrov kvocienta. Edini novi parameter v primeru, ko je $D$ lih, je $t$. Naslednja trditev, katere dokaz najdemo v [9], nam poda karakterizacijo razdaljno-regularnih antipodnih grafov, ki imajo razdaljno-regularne antipodne krove.

**Trditev 5.2.3** *Če je $H$ razdaljno-regularen antipoden graf, potem ima razdaljno-regularen antipoden krov le, če je $H$ cikel, poln graf ali poln dvodelen graf.* □




Slika 5.2: Razdaljno-regularen graf $G$ s premerom 4.

## 5.3 Tesni grafi

Preden podamo definicijo tesnih grafov, si poglejmo naslednji izrek, ki nam bo povedal na katerem intervalu lahko ležijo lastne vrednosti lokalnega grafa.

**Izrek 5.3.1** *Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s premerom $d \geq 3$ in lastnimi vrednostmi $k = \vartheta_0 > \vartheta_1 > \cdots > \vartheta_d$. Naj bo še $u$ poljubno vozlišče $v$ $G$. Označimo*

$$b^- = -1 - \frac{b_1}{\vartheta_1 + 1} \qquad \text{in} \qquad b^+ = -1 - \frac{b_1}{\vartheta_d + 1}. \tag{5.1}$$

*Potem ima lokalni graf $\Delta(u)$ najmanjšo lastno vrednost večjo ali enako vrednosti $b^-$ in drugo največjo lastno vrednost manjšo ali enako vrednosti $b^+$.*

**Dokaz.** Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf z $n$ vozlišči in $A$ njegova matrika sosednosti. Izberimo si vozlišče $u$ in označimo z $N_1$ matriko sosednosti lokalnega grafa $\Delta(u)$ in z $\lambda_i$ njene lastne vrednosti. Ker ima graf $G$ stopnjo $k$, lahko označimo vozlišča $\Delta(u)$ z $x_1, \ldots, x_k$. Prav tako vemo, da je stopnja grafa $\Delta(u)$ enaka $a_1$. Naj bo še $N$ Gramova matrika normiranih skalarnih produktov

$$N_{ij} = \frac{\langle u_\lambda(x_i), u_\lambda(x_j)\rangle}{\langle u_\lambda(x_i), u_\lambda(x_i)\rangle}.$$

Potem lahko zapišemo

$$N = I_k + N_1\omega_1 + (J_k - I - N_1)\omega_2 = (1 - \omega_2)\left(I_k + N_1\frac{\omega_1 - \omega_2}{1 - \omega_2} + J_k\frac{\omega_2}{1 - \omega_2}\right).$$

Izraz $1 - \omega_2$ lahho izpostavimo, ker je $\omega_2 \neq 1$, če $G$ ni poln večdelen graf (takrat imamo namreč samo lastni vrednosti $k$ in 0). Matrika $N/(1 - \omega_2)$ je pozitivna semidefinitna, zato so vse njene lastne vrednosti $\mu_i$ nenegativne. Torej za $i = 2, \ldots, k$ velja

$$\mu_i = 1 + \frac{\omega_1 - \omega_2}{1 - \omega_2}\lambda_i \geq 0.$$

Upoštevajmo še enakosti (4.14) in dobimo

$$1 + \frac{\lambda + 1}{\lambda + b_1 + 1}\lambda_i \geq 0. \tag{5.2}$$

Po definiciji kosinusnega zaporedja (4.11) ležijo vsi $\omega_i$ na intervalu $[-1, 1]$, torej je izraz $1 - \omega_2$ večji od nič. Ker je $k$ največja lastna vrednost, mora veljati $\lambda > -b_1 - 1$. Torej lahko neenakost (5.2) preoblikujemo v

$$(\lambda + 1)\lambda_i \geq -(\lambda + b_1 + 1). \tag{5.3}$$

Naj bo najprej $\lambda > -1$. Če iz neenakosti (5.3) izrazimo $\lambda_i$, dobimo

$$\lambda_i \geq -\frac{\lambda + b_1 + 1}{\lambda + 1} = -1 - \frac{b_1}{\lambda + 1}.$$

S pomočjo reprezentacij grafa lahko pokažemo, da mora biti druga največja lastna vrednost razdaljno-regularnega grafa pozitivna. Za dokaz glej [6]. Ker je izraz na desni za $\lambda \neq 1$ strogo naraščajoča funkcija, bo največji, ko bo $\lambda = \vartheta_1$, takrat pa bo ravno enak $b^-$.

Naj bo sedaj $\lambda < -1$. Ko izrazimo $\lambda_i$ iz neenakosti (5.3), se neenačaj obrne, zato dobimo

$$\lambda_i \leq -\frac{\lambda + b_1 + 1}{\lambda + 1} = -1 - \frac{b_1}{\lambda + 1}.$$

Izraz na desni bo tokrat najmanjši takrat, ko bo $\lambda = \vartheta_d$, torej takrat, ko bo enak $b^+$. Tako vse lastne vrednosti lokalnega grafa $\Delta(u)$, razen mogoče $a_1$, res ležijo na intervalu $[b^-, b^+]$. $\square$

V naslednjem izreku bomo pokazali neenakost, s pomočjo katere bomo nato definirali tesne grafe.

**Izrek 5.3.2** *Naj bo $G$ razdaljno-regularen graf s premerom $d \geq 3$, stopnjo $k$, presečnim zaporedjem $\{b_0 = k, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1 = 1, c_2, \ldots, c_d\}$ in lastnimi vrednostmi $k = \vartheta_0 > \vartheta_1 > \cdots > \vartheta_d$. Potem velja*

$$\left(\vartheta_1 + \frac{k}{a_1+1}\right)\left(\vartheta_d + \frac{k}{a_1+1}\right) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}. \tag{5.4}$$

*Enačaj velja natanko tedaj, ko so lastne vrednosti lokalnega grafa $\Delta(u)$ elementi množice $\{a_1, b^-, b^+\}$.*

**Dokaz.** Fiksirajmo vozlišče $u$ v grafu $G$. Po izreku 5.3.1 za lastne vrednosti $\eta_2, \ldots, \eta_k$ lokalnega grafa $\Delta(u)$ velja

$$(b^- - \eta_i)(b^+ - \eta_i) \leq 0, \qquad \text{za } i = 2, \ldots, k.$$

Enačaj velja natanko tedaj, ko je ali $\eta_i = b^-$ ali $\eta_i = b^-$. Lastna vrednost $\eta_1$ je stopnja lokalnega grafa $\Delta(u)$, torej je enaka $a_1$. Seštejmo zgornje neenakosti v

$$\sum_{i=2}^{k}(b^- - \eta_i)(b^+ - \eta_i) = (k-1)b^-b^+ - (b^- + b^+)\sum_{i=2}^{k}\eta_i + \sum_{i=2}^{k}\eta_i^2 \leq 0. \tag{5.5}$$

Vsota lastnih vrednosti lokalnega grafa $\Delta(u)$ je kar sled njegove matrike sosednosti, ki je enaka 0, torej imamo

$$\sum_{i=2}^{k}\eta_i = -\eta_1 = -a_1.$$

Podobno je vsota kvadratov lastnih vrednosti enaka sledi kvadrata matrike sosednosti, ki ima na diagonali povsod $\eta_1$, torej lahko izrazimo

$$\sum_{i=2}^{k}\eta_i^2 = k\eta_1 - \eta_1^2 = ka_1 - a_1^2.$$

Obe vsoti vstavimo v neenačbo (5.5) in dobimo

$$(k-1)b^-b^+ + (b^- + b^+)a_1 + ka_1 - a_1^2 \leq 0,$$

oziroma po preoblikovanju

$$k(a_1 + b^-b^+) \leq (a_1 - b^-)(a_1 - b^+).$$

Če upoštevajmo še definicijo za $b^-$ in $b^+$ in enačbo (4.5), dobimo z nekaj preoblikovanja neenakost (5.4), ki smo jo želeli pokazati. □

Nedvodelnemu razdaljno-regularnemu grafu $G$, za katerega v neenakosti (5.4) velja enačaj, rečemo **tesen graf**.

Če so vse tri lastne vrednosti lokalnega grafa $\Delta(u)$ različne med sabo, je po lemi 3.3.3 lokalni graf $\Delta(u)$ krepko-regularen. Naj ima graf $G$ še krovni indeks $r$, premer $d = 4$ in naj bosta $p > -q$ netrivialni lastni vrednosti njegovega lokalnega grafa. Potem rečemo, da je $G$ **antipoden tesen graf** s premerom 4 in ga označimo kot $AT4(p, q, r)$.

**Smithov graf** je nedvodelen krepko-regularen graf s parametri $(n, k; a, c)$, ki zadoščajo enakostim

$$k = -s\frac{(2t+1)(t-s) - t(t+1)}{(t - s + t(t+1)},$$

$$a = -(s+1)t\frac{t - s - t(t+3)}{t - s + t(t+1)}$$

in

$$c = -s(t+1)\frac{t - s - t(t+1)}{t - s + t(t+1)},$$

kjer sta $s$ in $t$ celi števili, za kateri velja $t - s \geq t(t + 3)$ in $k > t > s$. Iz enačb za lastne vrednosti krepko-regularnega grafa sledi, da so $k$, $t$ in $s$ lastne vrednosti Smithovega grafa.

V članku [15] so podane precej močne omejitve za nedvodelne antipodne razdaljno-regularne grafe $G$ s premerom $d = 4$ in Kreinovim parametrom $q^4_{44} = 0$, ki so navedne v naslednjem izreku. Za dokaz glej [15, 3.1]

**Izrek 5.3.3** *Naj bo $G$ nedvodelen antipoden razdaljno-regularen graf s premerom štiri in antipodnim razredom velikosti $r$. Označimo njegove lastne vrednosti s $k = \vartheta_0 > \vartheta_1 > t = \vartheta_2 > \vartheta_3 > s = \vartheta_4$ in naj bo Kreinov parameter $q^4_{44}$ enak nič. Potem je antipodni kvocient grafa $G$ Smithov graf. Najmanjši lastni vrednosti njegovega lokalnega grafa sta $s_1 = (t^2 + 2t + s)/2$ in $s_2 = (s - t^2)/2$. Nadalje velja ena od naslednjih trditev:*

*(i) graf $G$ ne vsebuje trikotnikov (tj. $a_1 = 0$),*

*(ii) $G$ je antipoden tesen graf $AT4(t, t + 2, r)$,*

*(iii)* $s = -(t+1)^2 - 1$, *antipoden kvocient grafa* $G$ *je točkovni graf posplošenega četverokotnika* $GQ(w, w^2)$, *kjer je* $t$ *sod,* $w = t+1$ *in je* $4w^3 + (w+1)^2$ *popoln kvadrat,*

*(iv) števili* $s$ *in* $t$ *sta sodi,* $-(t+2)^2 + \sqrt{t+2} \leq s < -(t+1)^2 - 1$, *za* $q = t+2$ *in* $u = (s+q^2)/2$ *mora število* $q(q-1) - u$ *deliti število* $(q-2)^2(q-1)^2 q$. *Izraz*

$$\begin{array}{rrll} & 4u^4 & & (q-2)^2 \\ - & 4u^3 & (q-1) & (q^3 - q^2 - 6q + 10) \\ + & u^2 & (q-1)^2 & (q^4 + 6q^3 - 15q^2 + 12q + 20) \\ - & 2u & (q-1)^3 & q(q+1)(q^2+4) \\ + & & (q-1)^4 & q^2(q+2)^2 \end{array}$$

*mora biti popoln kvadrat.* □

Izkaže se, da točka (iii) izreka 5.3.3 ni nikoli izpolnjena. To lahko pokažemo z dokaj preprosto aritmetiko.

**Posledica 5.3.4** *Naj bo* $G$ *nedvodelen antipoden razdaljno-regularen graf s premerom štiri, antipodnim razredom velikosti* $r$ *in naj bo Kreinov parameter* $q_{44}^4$ *enak nič. Potem je antipoden kvocient grafa* $G$ *točkovni graf posplošenega četverokotnika* $GQ(w, w^2)$ *in nima razdaljno-regularnega antipodnega krova za noben lih* $w$.

**Dokaz.** Naj bo $w \in \mathbb{N}$ liho število. Poglejmo si ostanke izraza $4w^3 + (w+1)^2$ po modulu 16. Za $w$ oblike $4a+1$, kjer je $a \in \mathbb{N}$, dobimo

$$4w^3 + (w+1)^2 = 256a^3 + 208a^2 + 64a + 8 \equiv 8 \pmod{16},$$

za $w$ oblike $4a+3$, kjer je $a \in \mathbb{N}$, pa

$$4w^3 + (w+1)^2 = 256a^3 + 592a^2 + 464a + 124 \equiv 12 \pmod{16}.$$

Po drugi strani dajo popolni kvadrati pri deljenju s 16 ostanke 0, 1, 4 ali 9. Torej $4w^3 + (w+1)^2$ ni popoln kvadrat za noben lih $w$. To pa je v protislovju s točko (iii) v izreku 5.3.3. □

V članku [15] je postavljena tudi domneva o neobstoju celoštevilskih rešitev eliptične krivulje $y^2 = 4w^3 + (w+1)^2$, ki je bila preverjena za majhne vrednosti $w$.

V naslednjem izreku pokažemo, da ima omenjena eliptična krivulja le dve trivialni celoštevilski rešitvi.

**Izrek 5.3.5** *Eliptična krivulja*

$$y^2 = 4x^3 + (x+1)^2 \tag{5.6}$$

*ima le celoštevilski rešitvi* $x = 0$, $y = \pm 1$.

**Dokaz.** Ker je dana eliptična krivulja simetrična glede na abscisno os, lahko brez škode za splošnost iščemo le rešitve, kjer je $y \geq 0$. Če namreč najdemo celoštevilsko rešitev $(x, y)$, potem je tudi urejeni par $(x, -y)$ celoštevilska rešitev dane krivulje. Ker je leva stran enačbe vedno nenegativna, mora veljati tudi $4x^3 + (x+1)^2 \geq 0$. Polinom $p(x) = 4x^3 + (x+1)^2$ pa nima nobenega lokalnega ekstrema in ima edino realno ničlo večjo od $-1$. Torej lahko brez škode za splošnost rečemo, da je $x \geq 0$. Zdaj iz enačbe (5.6) sledi, da mora biti $y > x$.

Naj bo sedaj $x$ nenegativno celo število. Poglejmo si kakšne ostanke da izraz $4x^3 + (x+1)^2$ pri deljenju s 3

$$4x^3 + (x+1)^2 \equiv x + x^2 + 2x + 1 \equiv x^2 + 1 \pmod 3.$$

Pri tem smo uporabili Fermatov izrek, ki pove, da za celo število $a$ in praštevilo $p$ velja $a^p \equiv a \pmod p$. Ker ima kvadrat naravnega števila pri deljenju s 3 le ostanke 0 ali 1, lahko $x$ in $y$ zapišemo kot $x = 3a$ in $y = 3b \pm 1$ za neki nenegativni celi števili $a$ in $b$. Ker je $y > x$ mora biti $b \geq a$. Vstavimo to v enačbo (5.6) in dobimo

$$b(3b \pm 2) = a(36a^2 + 3a + 2). \tag{5.7}$$

Trivialna rešitev enačbe (5.7) je $a = b = 0$ in od tod $x = 0$, $y = 1$. Torej smo že dobili obe celoštevilski rešitvi, ki smo ju navedli v izreku. V primeru da je le eden od $a$ in $b$ enak 0, ne dobimo nobene rešitve, torej vzamimo sedaj $a > 0$ in $b > 0$. V primeru, ko je $a = b$ ne dobimo nobene nove rešitve, saj za $y = 3b + 1$ dobimo a $=$ 0, za $y = 3b - 1$ pa $a$ ni celo število. Torej lahko od zdaj naprej vzamemo $a < b$.

Poglejmo si najprej primer, ko je $y = 3b + 1$. Ker je $a < b$, lahko $b$ zapišemo kot $b = a + c$, kjer je $c \in \mathbb{N}$. Potem lahko enačbo (5.7) preoblikujemo v

$$a^3 - \frac{c}{6}\,a - \frac{c(3c+2)}{36} = 0. \tag{5.8}$$

Ničle te kubično enačbe v spremenljivki $a$ lahko poiščemo s Cardanovimi formulami. Najprej izračunajmo diskriminanto $D = Q^2 + P^3$, kjer je $3P = -c/6$ in $2Q = -c(3c+2)/36$. Dobimo

$$D = \frac{c^2}{6^6}((9c+6)^2 - 8c).$$

Ker je $c$ naravno število, je $D > 0$, torej ima kubična enačba eno realno in dve kompleksni rešitvi. Pišimo $U = \sqrt[3]{-Q+\sqrt{D}}$ in $V = \sqrt[3]{-Q-\sqrt{D}}$ in naj bo $\varepsilon \neq 1$ tretji koren enote. Potem so $a_1 = U + V$, $a_2 = U\varepsilon + V\varepsilon^2$ in $a_3 = U\varepsilon^2 + V\varepsilon$ rešitve dane kubične enačbe. Če želimo, da bo realna rešitev tudi celo število, mora biti $D$ popoln kvadrat. Torej lahko pišemo

$$(9c+6)^2 - 8c = d^2, \tag{5.9}$$

za neko naravno število $d$. Enačbo (5.9) lahko preoblikujemo v

$$(9c - d + 6)(9c + d + 6) = 8c.$$

Ker je $9c + d + 6 > 8c$ in sta $c$ in $d$ naravni števili, ne dobimo nobene rešitve.

Naj bo sedaj $y = 3b - 1$ in naj bo $b = c - a$. Ker je $0 < a < b$, je $c \geq 2$. Enačbo (5.7) lahko preoblikujemo v

$$a^3 + \frac{c}{6}\,a - \frac{c(3c-2)}{36} = 0. \tag{5.10}$$

Diskriminata $D$ te kubične enačbe v spremenljivki $a$ je potem

$$D = \frac{c^2}{6^6}((9c-6)^2 + 8c)$$

in je zopet pozitivna. Torej mora biti $D$ ponovno popoln kvadrat. Zato lahko pišemo

$$(9c-6)^2 + 8c = d^2, \tag{5.11}$$

za neko naravno število $d$. Ker je $c \geq 2$, mora biti $d > 12$. Enačbo (5.11) lahko preoblikujemo v

$$(9c - d - 6)(9c + d - 6) = -8c.$$

Ker je $c + d > 14$, je $9c + d - 6 > 8c$ in spet ne dobimo nobene rešitve. $\square$

Zdaj lahko napišemo trivialno posledico izrekov 5.3.3 in 5.3.5.

**Posledica 5.3.6** *Točkovni graf posplošenega četverokotnika $GQ(w, w^2)$ nima razdaljno-regularnega antipodnega krova premera 4 in s Kreinovim parametrom $q^4_{44} = 0$ za noben $w$.* $\square$

# Poglavje 6

# Zaključek

Matematika je tako zanimiva ravno zaradi prepletanja mnogih različnih vej in zaradi iskanja posplošitev osnovnih primerov. Tako smo tudi v tem diplomskem delu zajeli široko paleto matematičnih panog. Najprej smo začeli s končnimi geometrijami, kjer smo uvedli delne geometrije. Znotraj njih smo si še posebej ogledali posplošene četverokotnike. Nato smo zajadrali v teorijo grafov, ko smo ugotovili, da lahko delne geometrije predstavimo kot grafe, ki imajo posebno strukturo. To so bili krepko-regularni grafi, ki smo jih najprej definirali povsem kombinatorično. Tudi zanje smo pokazali lepo število njihovih lastnosti. Pri tem smo poleg kombinatorike uporabljali tudi orodja linearne algebre, še posebej znanje o lastnih vrednostih matrik. Nato smo želeli te grafe posplošiti. Ko smo omejitev, da mora biti premer grafa enak dva, sprostili, smo dobili razdaljno-regularne grafe. Znotraj njih smo se spoznali s kar nekaj temami. Uvedli smo ekvitabilne particije in razdaljne matrike in pokazali, da lahko razdaljno-regularne grafe definiramo tako s pomočjo enih kot drugih. S tem, ko je premer grafa prešel iz primera, ko je bil enak dva, na splošen $d$, se je povečalo tudi število parametrov, ki definirajo razdaljno-regularen graf. A to število je bilo še vedno enako $2d - 1$. S pomočjo znanja o asociativnih shemah, smo uvedli poleg presečnih števil še Kreinove parametre in kosinusno zaporedje. Nato smo se spoznali z antipodnimi grafi in povedali nekaj lastnosti antipodnih razdaljno-regularnih grafov. Z osvojenim znanjem smo lahko povedali na katerem intervalu ležijo lastne vrednosti lokalnega grafa. Tako smo uvedli tudi tesne grafe, ki so bili ekstremen primer, ko so te lastne vrednosti ležale na robu intervala. Ko smo nazadnje govorili o antipodnih krovih, smo spet prišli nazaj na posplošene četverokotnike. Antipodni krovi so nas pripeljali tudi do eliptičnih krivulj in iskanja celoštevilskih točk na njih. To je ponovno povsem druga veja matematike, ki zajema mnogo novega znanja.

Cremona je v svoji knjigi o eliptičnih krivuljah (glej [8]) podal tabele za veliko število krivulj. Te tabele je kasneje še precej dopolnil in jih objavil na svoji domači strani "http://modular.fas.harvard.edu/cremona/INDEX.html". Izkazalo se je, da se eliptična krivulja, ki smo jo dobili pri iskanju antipodnih krovov točkovnega grafa posplošenega četverokotnika $GQ(w, w^2)$, ne pojavi v njej, kljub temu, da je vključenih precej zelo podobnih eliptičnih krivulj. To kaže na to, da trenutne metode za iskanje celoštevilskih ničel na eliptičnih krivuljah niso prišle v poštev in zato je naš dokaz kljub navidezni elementarnosti še toliko pomembnejši. Še vedno pa obstaja odprto vprašanje ali je točka iv v izreku 5.3.3 sploh kdaj izpolnjena. Veliko odprtih vprašanj obstaja tudi v zvezi z obstojem nekaterih posplošenih četverokotnikov z majhnimi parametri.

Poleg obdelanih tem bi lahko pokukali še v teorijo načrtov in teorijo kodiranja, ki sta tudi močno povezana z njimi. Pogledali bi si lahko tudi reprezentacije grafov, s pomočjo katerih lahko med rugim pokažemo, da imajo primitivni razdaljno-regularni grafi drugo največjo lastno vrednost večjo ali enako $-1$. Prav tako bi lahko še globlje zakorakali med asociativne sheme ali med eliptične krivulje in preko slednjih prešli na kriptografijo. S tem pa bi prišli na področje, ki je v zadnjem obdobju, ko se informacije praktično neomejeno pretakajo med nami, zelo aktualno.

# Literatura


[1] L. M. Batten, *Combinatorics of Finite Geometries*, 2. izdaja, Cambridge University Press, 1997.

[2] L. Beineke, R. Wilson, *Topics in Algebraic Theory*, Cambridge University Press, 2004.

[3] N. L. Biggs (ur.), *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1974.

[4] N. L. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1994.

[5] R. C. Bose, *Strongly Regular Graphs, Partial Geometries and Partially Balanced Designs*, Pacif. J. Math. **13** (1963), 389–419.

[6] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, 1989.

[7] F. Buekenhout (ur.), *Handbook of Incidence Geometry: Buildings and Foundations*, North-Holland, 1995.

[8] J. E. Cremona (ur.), *Algorithms for Modular Elliptic Curves*, Cambridge University Press, 1997.

[9] A. Gardiner, *Antipodal Covering Graphs*, J. Cobin. Theory(B) **16** (1974), 255–273.

[10] C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, New York, 1993.

[11] C. D. Godsil, G. F. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.

[12] F. Harary, *Graph Theory*, 3. izdaja, Addison-Wesley, 1972.

[13] A. Jurišić, *Distance Regular Antipodal Covers of Strongly Regular Graphs*, magistrsko delo, University of Waterloo, 1990.

[14] A. Jurišić, *Antipodal Covers*, doktorska disertacija, University of Waterloo, 1995.

[15] A. Jurišić, *AT4 Family and 2-homogeneous Graphs*, Discrete Mathematics **264** (2003), 127–148.

[16] A. Jurišić, J. Koolen, *Krein Parameters and Antipodal Tight Graphs with Diameter 3 and 4*, Discrete Mathematics **244** (2002), 181–202.

[17] A. Jurišić, J. Koolen, P. Terwilliger, *Tight Distance-Regular Graphs*, J. Algebraic Combin. **12** (2000), 163–197.

[18] A. Jurišić, Š. Miklavič, *Asociativne sheme*, Obzornik za matematiko in fiziko **3** (2003), 65–81.

[19] S. E. Payne, J. A. Thas, *Classical Finite Generalized Quadrangles: a Combinatorial Study*, Ars Combinatoria **2** (1976), 57–110.

[20] S. E. Payne, J. A. Thas, *Finite Generalized Quadrangles*, Pitman Publishing, 1984.

[21] J. A. Thas, *Combinatorics of Partial Geometries and Generalized Quadrangles*, Higher Combinatorics (1976), 183–1999.

[22] J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, 2. izdaja, Cambridge University Press, 2001.

[23] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, 2. izdaja, Prentice Hall, 2001.

# Stvarno kazalo