

Zveza med ratingom in spretnostjo igralca v šahu

Ljupche Milosheski

1. julij 2018

1. Uvod

Ali vas zanima, kakšen sistem se uporablja v šahu za razvrstitev igralcev glede na njihov nivo? Ta sistem je poznan pod imenom Elo rating. V tem projektu bomo poskušali razložiti delovanje tega sistema.

Kaj je v resnici njegov cilj in kje se, poleg pri šahu, še uporablja?

Koliko je en igralec boljši od drugega igralca, glede na njuna ratinga? Rating sistem bi moral biti tako dober, da bi igralec z večjim ratingom večinoma premagal igralca s slabšim ratingom. V nasprotnem primeru ga ne bomo smatrali za uporabnega.

Kako naj na podlagi končanih tekem napovemo rezultat nekega dvoboja? Pri tem bomo uporabili linearni model in regresijo.

V 2. poglavju bomo razložili, kaj je Elo rating, kako deluje, kako se rating spremeni po koncu igre in kako je ta sprememba odvisna od naše ocene. V nadaljevanju (3. poglavje) bomo predstavili podatke, ki jih bomo uporabljali v tem projektu. Potem, v 4. poglavju, bomo videli, kolikšna je verjetnost, da se boljšemu igralcu zviša rating. Z drugimi besedami, vprašali se bomo, kolikšna je verjetnost, da igralec preseneti. Ta rezultat bomo analizirali in ga na koncu izrazili z intervalom zaupanja. V letu 1999, sta Glickman in Jones [6] prišla do podobnih izračunov. Njun pristop se razlikuje od našega, ker sta razdelila podatke po skupinah, kjer je maksimalna razlika ratingov največ 10. V naslednjem poglavju (5.) bomo izračunali, kako zelo sta povezana razlika ratingov med igralcema in rezultat dvoboja. Seveda gre za pozitivno korelacijo. Logično je namreč, da večja razlika v ratingu pomeni tudi večjo verjetnost, da zmaga boljši igralec. Rating sistem sicer ne bi izražal resnično moč igralcev. Vseeno nas zanima, kako močna je povezava med razliko ratingov in rezultatom dvoboja. V 6. poglavju bomo uporabili linearni model in regresijo, s čimer bomo na podlagi vzorca napovedali, kaj se bo zgodilo, če imamo podano razliko med ratingoma. Na koncu bomo podali nekaj zaključkov.

2. Elo rating in rating v šahu

Elo rating je sistem, s katerim lahko ocenimo relativno moč igralcev v igri ena na ena. Vpeljal ga je madžarski fizik Arpad Elo. Njegov prvotni namen je bil uporabiti rating v šahu. Še danes ga v šahu uporabljata FIDE (Svetovna šahovska federacija) in USCF (Šahovska zveza ZDA). Uporabljajo ga tudi v nogometu, ameriškem nogometu, igri Scrabble in igri Backgammon [2].

Vsak igralec ima 2 tipa ratingov: resničnega in približnega. Nikoli ne moremo oceniti dejanske spretnosti igralca. S statističnimi metodami poskušamo določiti čim boljšo oceno za resnični rating [4]. Elo je domneval, da je moč igralcev normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. Čeprav igralec v posamezni igri igra boljše ali slabše, je mislil, da se bo čez čas povprečje spreminjalo počasi. Potrebna je še ena predpostavka, in sicer v primeru, da prvi igralec zmaga eno igro, pomeni, da je bil zagotovo boljši kot nasprotnik [2].

Osnovna ideja Elo ratinga je, da bi za igralca z različnima ratingoma morali biti sposobni izračunati verjetnost p – zmage nad določenim igralcem. Potem predpostavimo, da igrata N iger. Če igralec z večjim ratingom želi zvišanje ratinga, potem mora zmagati vsaj $[p * N]$ iger, sicer se bo njegov rating zmanjšal. Povedano drugače, recimo, da ima igralec A verjetnost za zmago proti igralcu B 60%. V primeru da zmaga v 6 od 10 iger se rating ne spremeni, če zmaga v 7 ali več iger, se njegov rating zviša, če zmaga v 5 ali manj, pa se njegov rating zmanjša.

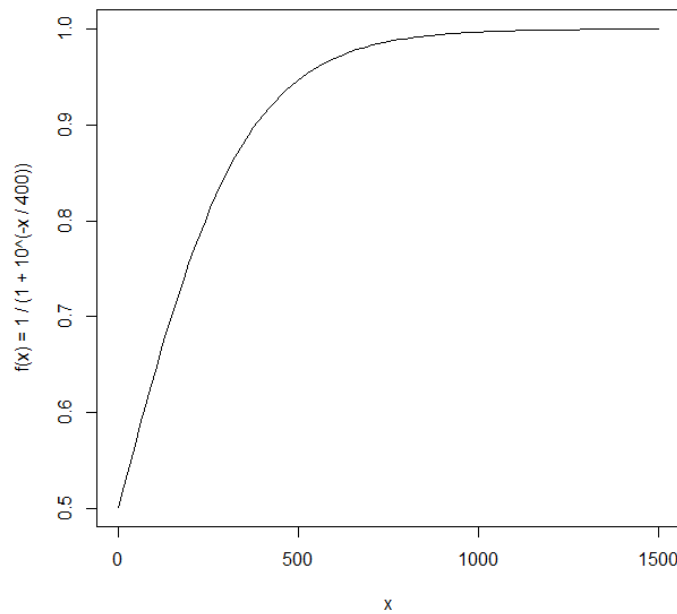
Največji rating v šahu znaša 2882. Dosegel ga je norveški igralec Magnus Carlsen. Povprečni rating vseh igralcev je okoli 1500 [2].

Predpostavimo, da zmagovalec dobi točko, poraženec pa 0 točk. V primeru remija si točko razdelita, tj. vsak dobi 0.5 točke. Ocena za število točk E_A , ki naj jih dobi igralec A , je vsota verjetnosti, da zmaga igralec A , kadar igra proti igralcu B , in polovica verjetnosti, da igralca remizirata. Recimo, da je $E_A = 0.75$. V enem primeru to pomeni, da bo igralec A zmagal 75% iger in izgubil preostale. V nasprotnem primeru nam to pove, da bo igralec A zmagal 50% iger in remiziral na preostalih [2].

Formuli za izračun ocene E_A in E_B sta:

$$E_A = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_B - R_A}{400}}} \quad \text{in} \quad E_B = \frac{1}{1 + 10^{\frac{R_A - R_B}{400}}},$$

kjer je R_A rating igralca A in R_B je rating igralca B . Če ima igralec za 100 večji rating od nasprotnika lahko pričakujemo, da bo zmagal z verjetnostjo približno 64%. Pri razliki 200 točk pričakujemo, da bo zmagal z verjetnostjo približno 76% [5].



Slika 1: Graf funkcija za oceno števila točk: $f(x) = \frac{1}{1+10^{\frac{-x}{400}}}$

Oceni E_A in E_B se lahko tudi izrazita kot $E_A = \frac{Q_A}{Q_A + Q_B}$ in $E_B = \frac{Q_B}{Q_A + Q_B}$, kjer sta $Q_A = 10^{\frac{R_A}{400}}$ in $Q_B = 10^{\frac{R_B}{400}}$ [2].

Zdaj lahko izračunamo, kolikokrat je ocena za število točk igralca A , večja oziroma manjša od igralca B . Dobimo naslednjo formulo:

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\frac{Q_A}{Q_A + Q_B}}{\frac{Q_B}{Q_A + Q_B}} = \frac{Q_A}{Q_B},$$

kar pomeni, da je ocena števila točk igralca A za $\frac{Q_A}{Q_B}$ večja kot ocena števila točk za igralca B .

Vsota ocen je vedno enaka 1, kar sledi iz

$$E_A + E_B = \frac{Q_A}{Q_A + Q_B} + \frac{Q_B}{Q_A + Q_B} = 1.$$

Če ne bi uporabljali ustrezne formule, bi se lahko zgodilo, da se seštevek ocen ne bi seštel v 1. To pa nam zagotavlja sistem Elo rating.

Po koncu dvoboja se novi rating igralcev izračuna po naslednji formuli. Novi rating R'_A je enak:

$$R'_A = R_A + K * (S_A - E_A),$$

kjer je S_A je število točk, ki jih je dobil igralec A , K je faktor, ki nam pove, za koliko največ se lahko rating spremeni [5].

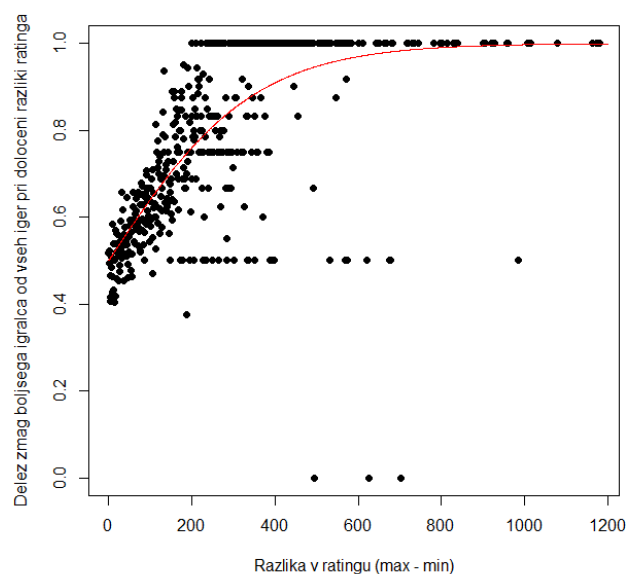
Če se omejimo na eno igro, potem lahko sklepamo, da se rating vsakega igralca spremeni kvečjemu za K . Število točk S_A je enako 0, 0.5 ali 1, odvisno od rezultata igre, in E_A je med 0 in 1, kar smo že razložili. Potem lahko sklepamo, da velja $0 \leq E_A, S_A \leq 1$ od koder sledi $(S_A - E_A) \in [-1, 1]$ oziroma $|R_A - R'_A| \leq K$.

Ker se rating pri vsaki igri spremeni kvečjemu za K , je potrebno omeniti, kakšen K uporablja FIDE:

1. $K = 40$ za vse igralce, ki so mlajši kot 18 let in je njihov rating manjši od 2300, ter igralce, ki so odigrali manj kot 30 iger,
2. $K = 20$ za vse igralce, ki nikoli niso imeli večjega ali enakega ratinga kot 2400,
3. $K = 10$ za vse igralce, ki so kadarkoli imeli rating vsaj 2400 in so odigrali vsaj 30 iger. Ko enkrat dosežejo $K = 10$, se K ne spreminja več [2].

3. Zbiranje podatkov

Podatke smo pridobili s spletne strani chesstempo.com. Na tej spletni strani lahko najdemo podatke za več kot 100.000 igralcev in več kot 2.000.000 iger. Z računalnikom smo obdelali podatke o 7.500 dvobojih pri čemer smo shranili ratinga igralcev in končni rezultat. Podatki v našem vzorcu vsebujejo dvoboje 4 najboljših igralcev. Na spodnji sliki je na x osi predstavljena razlika med ratingoma boljšega in slabšega igralca, na y osi pa delež, ki predstavlja zmago boljšega igralca. Rdeča funkcija predstavlja oceno za število točk boljšega igralca. Za risanje slik smo uporabili programski jezik R.



Slika 2: Črne pike predstavljajo verjetnost, da boljši igralec zmaga v našem vzorcu.

Rdeča funkcija je ocena za število točk boljšega igralca.

4. Ocena in resnični podatki

V 2. poglavju smo predstavili formulo za izračun ocene števila točk nekega igralca. Želimo preveriti, ali igralec z večjim ratingom dobi vsaj toliko točk kot smo ocenili.

Število pik pod grafom rdeče funkcije je 195 od skupno 481. To nam pove, kolikokrat je igralec z večjim ratingom dobil manj točk kot smo ocenili.

Želimo določiti 95% ($= 100\% - \alpha$) interval zaupanja za verjetnost, da je rezultat pri določeni razliki v ratingu boljši od ocenjenega. Lahko uporabimo formulo za interval zaupanja deleža. Število pik (x, y) , ki imajo potrebno lastnost ($y \geq f(x) = \frac{1}{1+10^{-x}}$) je 286 ($= k$). Število vseh pik pa je 481 ($= n$).

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{286}{481} = 0.5946,$$
$$\Delta = t_{\frac{1+\beta}{2}}(\infty) \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.0439 \text{ [7, str. 124], [8, str. 172].}$$

Interval zaupanja s 95% verjetnostjo je $[\hat{p} - \Delta, \hat{p} + \Delta] = [0.5507, 0.6385]$.

To pomeni, da ima 95% primerov vzorcev igralcev z večjim ratingom, verjetnost med 55.07% in 63.85%, da bodo dobili več točk, kot je naša ocena.

Rezultat je logično večji kot 50%, ker obdelani podatki vsebujejo igre 4 najboljših igralcev. Rating se poveča takrat, ko igralec dobi več točk od ocene. Sklepa se, da bi se moral njihov rating povečati čez čas, sicer bi bili ti igralci povprečni.

Leta 1999 sta Glickman in Jones izračunala intervale zaupanja za skupine razlik ratingov. V skupini so bile razlike ratingov kvečjemu 10. Naš rezultat se razlikuje, ker smo uporabljali drugačen vzorec, hkrati pa se je od leta 1999 spremenil tudi način igre. V njunem vzorcu so imeli boljši igralci manjše število točk, kot je pričakovano. Morali bi pomnožiti pričakovano vrednost s faktorjem 0.713, da se ujema z njihovim vzorcem [6].

5. Korelacija med razliko ratinga in rezultatom dvoboja

Kako razlika ratingov vpliva na končen rezultat? Kako zelo močna je povezanost med temi spremenljivkami? Odgovor na vprašanji lahko dobimo, če izračunamo korelacijski koeficient.

Ker imamo na voljo vzorec, bomo uporabili Pearsonov korelacijski koeficient. V njegovi formuli nastopata vzorčna kovarianca in vzorčna disperzija. Vzorčna kovarianca nam pove, kako močno sta dve spremenljivki povezani. Vzorčna disperzija predstavlja odklon vrednosti neke populacije okoli mere sredine. Pearsonov korelacijski koeficient se izračuna po naslednji formuli:

$$r_{X,Y} = \frac{k(X,Y)}{S_X * S_Y} \text{ [7], [8],}$$

kjer je $k(X, Y)$ vzorčna kovarianca ter s_X in s_Y sta vzorčni disperziji.

$$k(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y}) = 24.7501,$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 47744.9832,$$

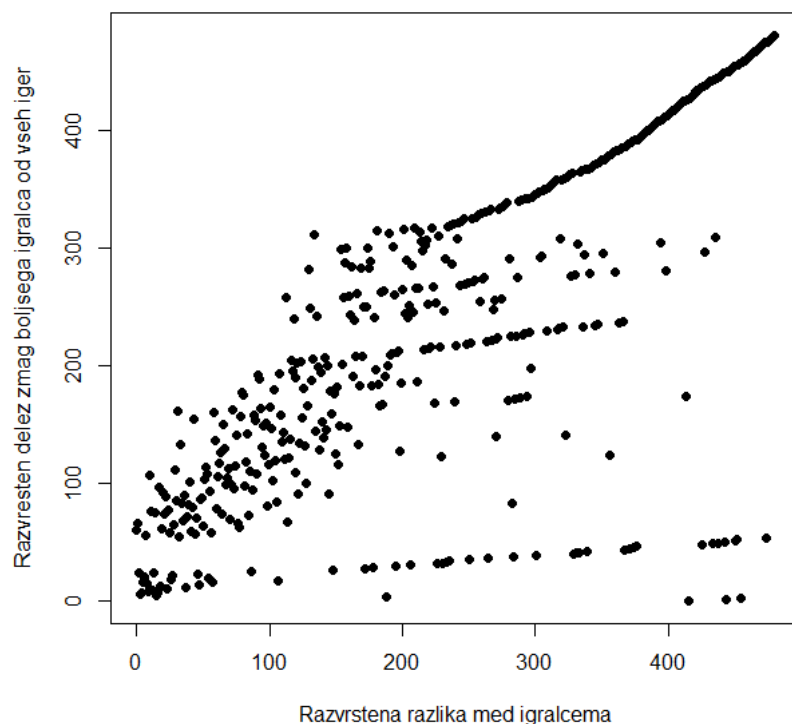
$$s_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 0.0411 \quad \text{in} \quad r_{X,Y} = 0.5589.$$

Korelacija med razliko ratingov in rezultatom je pozitivna. To pomeni, da se bo v primeru povečanja razlike med ratingoma, povečalo tudi število točk boljšemu igralcu. Korelacija ni tako močna kot smo pričakovali.

Morda je razlog za manjšo korelacijo veliko pik, ki pri razliki večji od 200 konvergirajo proti 1. Zaradi tega nam lahko Spearmanov korelacijski koeficient da boljšo oceno. Iz slike vidimo, da je zveza bolj monotona kot linearna. Spearmanov korelacijski koeficient, ki izračuna monotono povezanost pa bo bolj natančen. Če podatke rangiramo, sta Spearmanov in Perasonov korelacijski koeficient enaka [9].

Zdaj bomo razložili postopek rangiranja podatkov, ki jih bomo v nadaljevanju uporabili za izračun Spearmanove korelacije. X os je do sedaj predstavljala razliko v ratingu med boljšim in slabšim igralcem. Podatke bomo uredili po velikosti in bodo na osi x predstavljali razvrščeno razliko. Predpostavimo, da so razlike shranjene v nekem seznamu. Če seznam uredimo naraščajoče, bo na x osi indeks razlike v urejenem seznamu. Definiramo še matematično definicijo tega postopka. Recimo, da so bile vrednosti na x osi do sedaj $a_1, \dots, a_n$, nove pa so $b_1, \dots, b_n$. Za zaporedje a_i velja: $\exists i: 0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow a_{i+1} - a_i \geq 1$. Definiramo splošno formulo za b_n in sicer $\forall i: 0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow b_i = \sum_{j=0}^{n-1} [a_j \leq a_i]$, kjer je $[P]$ enak 1, če je pogoj P izpolnjen, sicer pa je 0. Sedaj velja: $\forall i: 0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow b_{i+1} - b_i = 1$. Nova y vrednost predstavlja indeks v seznamu, ki je urejen po naraščajočih deležih zmag. V primeru enakega deleža je seznam urejen naraščajoče glede na razliko ratingov [9].

Zakaj je to dober način razvrščanja? Razmislimo o tem, kaj se zgodi z majhnimi razlikami ratingov. Pri majhnih razlikah, bo delež zmag manjši. To pomeni, da bodo majhne x vrednosti imele tudi majhne y vrednosti.



Slika 3: Razvrščena razlika med igralcema glede na delež zmag boljšega igralca

Zdaj lahko izračunamo Spearmanov korelacijski koeficient po naslednji formuli:

$$r_{s(X,Y)} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)} = 0.7563 \text{ [8]} .$$

Zadnji rezultat je bolj logičen in nam pokaže, da je povezanost med ratingom in številom točk večja kot prej.

Zanimivo je omeniti, da je linearna povezanost v dejanskih podatkih enaka monotoni povezanosti v rangiranih podatkih. Povedano drugače, Pearsonov korelacijski koeficient je za rangirane podatke enak Spearmanovemu:

$$r_{p(X,Y)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 * \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = r_{s(X,Y)} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)} \text{ [9]} .$$

6. Linearni model in regresija

Na podlagi vzorca želimo napovedati vrednost nekega parametra pri določeni vrednosti drugega parametra. Za ta namen lahko uporabimo linearni model in regresijsko funkcijo. To je funkcija, ki se najbolj prilega našim podatkom. Enačba funkcije je $Y' = f(X)$, ki nam pove, kakšen je vpliv spremenljivke X na Y , če samo X vpliva na Y . Ker pa ponavadi na Y vplivajo tudi druge stvari, se točke iz Y' odklanjajo od idealne regresijske krivulje. Nova enačba je $Y = Y' + E = f(X) + E$, kjer E predstavlja člen napake [8]. Linearni regresijski funkciji se reče linearni model in velja naslednja enačba:

$$Y' = a + bX \Rightarrow Y = Y' + E = a + bX + E \quad [1], [3], [8].$$

V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da v našem vzorcu obstaja pozitivna povezanost med razliko ratinga in verjetnostjo, da bo boljši igralec zmagal. Ker želimo napovedati rezultat dvoboja pri določeni razliki v ratingu, uporabimo metodo najmanjših kvadratov. Pri tej metodi želimo poiskati takšno linearno funkcijo $y = a + bx$, da bo funkcija $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (bx_i + a))^2$ minimalna.

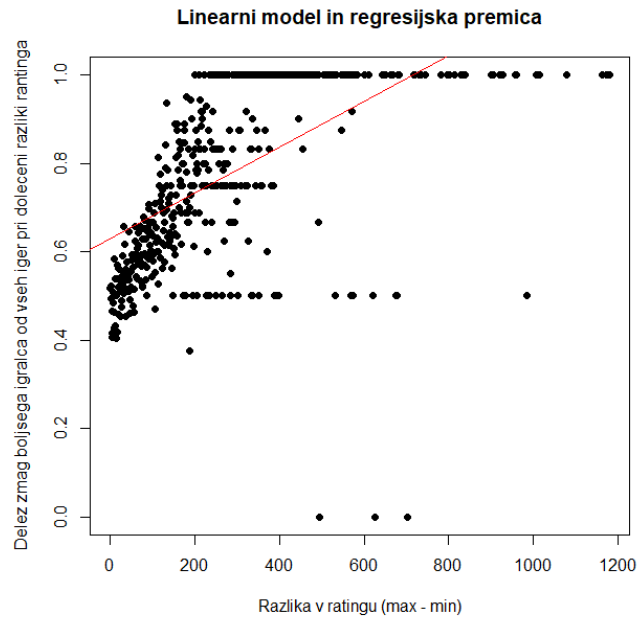
Funkcijo minimiziramo tako, da poiščemo stacionarni točki: $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0$.

Rešitev zgornjih enačb je:

$$a = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad \text{in} \quad b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad [8].$$

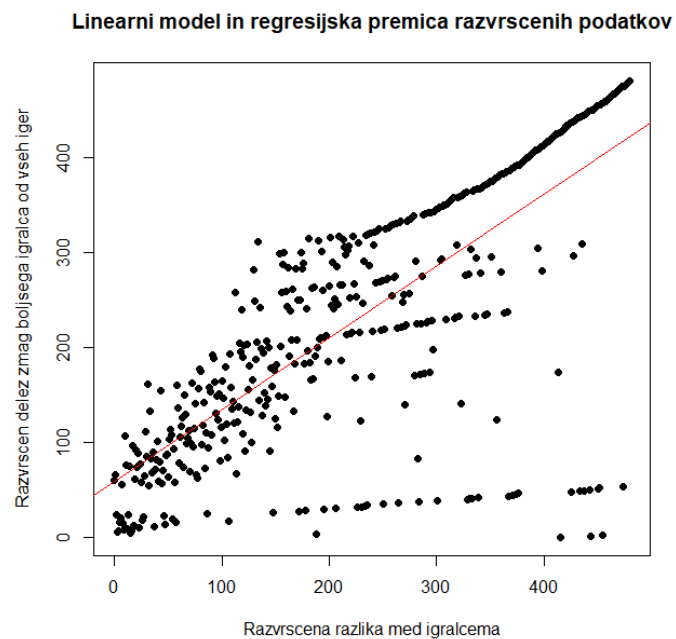
Če uporabimo zadnji izračun na podatkih našega vzorca, dobimo rezultat $a = 0.0005$ in $b = 0.6302$.

Dobljena premica ne predstavlja dobre ocene, ker že pri $x = 793.6$ dobimo $y = 1$ in verjetnost ne sme biti večja od 1. Napoved izboljšamo tako, da premico spremenimo v $g(x) = \min(1, f(x))$ pri čemer je $f(x) = 0.6302 + 0.0005x$ linearna funkcija, ki smo jo dobili z metodo najmanjših kvadratov.



Slika 4: Dejanski podatki in njihova regresijska premica.

Ostalo je še linearni model za razvrščene podatke. Rezultat tega modela bomo izrazili z intervalom. Ker v razvrščenih podatkih, y os predstavlja indeks v urejenem seznamu, bo ocena za y , pomenila med kakšnimi verjetnostmi zmag iz seznama se ta točka nahaja. Podobno kot prej bomo poiskali to premico po metodi najmanjših kvadratov. Spet veljajo iste enačbe, ki smo jih izpeljali zgoraj. Če izračunamo koeficienta enačbe, dobimo rezultat $a = 58.4769$ in $b = 0.7563$, torej premica je $y = 58.4769 + 0.7563x$. Na spodnji sliki so prikazani razvrščeni podatki in njihova linearna regresijska funkcija.



Slika 5: Razvrščene podatke in njihova regresijska premica.

7. Zaključek

V tem projektu smo spoznali Elo rating, kako deluje in kje se uporablja. Potem smo izračunali interval zaupanja, in ugotovili, da igralec z večjim ratingom dobi več točk od naše ocene. Izkazalo se je, da je ta verjetnost na intervalu $[0.5507, 0.6385]$ precej velika (zaradi slabega vzorca podatkov). Obravnavani igralci so bili na začetku povprečno dobri, potem pa so postali najboljši. To pojasnjuje velikost rezultata, ki smo ga dobili.

V naslednjem poglavju smo izračunali Pearsonov korelacijski koeficient med razliko v ratingih in verjetnostjo, da igralec z večjim ratingom zmaga. Videli smo, da pozitivna korelacija obstaja, bila pa je manjša od pričakovane. Ocenjevanje z linearno premico nam ni dalo dobre ocene. Iz slike pa je bilo razvidno, da je zveza bolj *monotona* kot linearna. Zato smo podatke nato uredili in izračunali Spearmanov korelacijski koeficient. Ta koeficient predstavlja monotono zvezo med spremenljivkama. Izkazalo se je, da je ta koeficient večji, kar pomeni, da je zveza bolj *monotona* kot linearna. Zaključili smo z linearnim modelom in regresijsko premico. Izračunali smo dve regresijski premici, in sicer prvo za prvotne podatke, in potem drugo za razvrščene podatke, ki je bila boljša ocena kot prva.

Literatura

- [1] Archdeacon, T. (1994). Correlation and regression analysis: A Historian's Guide. University of Wisconsin.
- [2] Elo Rating System. (23.5.2018). https://en.wikipedia.org/wiki/Elo_rating_system
- [3] Friedman, J. H., Tibshirani, R., Hastie, T. (2001). The Elements of Statistical Learning. Stanford University.
- [4] Glickman, M. E. (23.5.2018). Chess Ratings – How They Work.
<https://www.chess.com/article/view/chess-ratings---how-they-work>
- [5] Glickman, M. E. (1995). A comprehensive guide to chess ratings. American Chess Journal, 3, 59-102.
- [6] Glickman, M. E., Jones, A. C. (1999). Rating the Chess Rating System. Chance, 12, 2, 21-28.
- [7] Gonick, L. (1993). The Cartoon Guide to Statistics. Collins Reference.
- [8] Jurišić, A. (2015). Verjetnostni račun in statistika. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko.
- [9] Spearman Correlation. (23.5.2018).
<http://www.statstutor.ac.uk/resources/uploaded/spearman.pdf>
- [10] Wauters, K., Desmet, P., Van Den Doortgate, W. (2016). Monitoring Learners' Proficiency: Weight Adopting in the Elo Rating System. Computers & Education, Volume 98 Issue C, July 2016, Pages 169 - 179.