

Kocka in risalni žebliček

Domen Dolanc

13. september 2017

1 Uvod

Vas je kdaj zanimalo, kolikokrat bo na pošteni kocki padlo 6 pik, če jo boste vrgli 10000-krat. Seveda je odgovor $\frac{1}{6}$ metov, kar je približno 1666. To je teoretično, v realnosti bi bilo število blizu temu izračunu. Kaj pa z doma izdelano kocko, recimo iz bonbona, bi lahko trdili enako? Bi upali staviti, da bo 6 pik padlo približno tolikokrat kot 4 pike? Na enak način lahko uporabimo navaden risalni žebliček, ki ga najdemo v pisarni, ali v trgovini. Lahko bi rekli, da ima pri metu le dve stanji. Najlažje, da ju prikažemo s sliko.



Slika 1: Konica obrnjena navzdol.



Slika 2: Konica obrnjena navzgor.

Na sliki1 bi lahko tudi rekli, da žebliček leži, na drugi pa stoji. Po občutku lahko sklepamo, da bo pri daljši konici ob metu večkrat konica obrnjena navzdol. Bi ga lahko uporabili pri odločanju pomembnih odločitev, namesto da bi vrgli kovanec? Morda v nekaterih situacijah potrebujemo nepošteno odločanje, da bi s tem končni rezultat bil pošten. Za primer vzamemo dva brata, ki tekmujeta kdo bo trenutni dan preživel za računalnikom. Starejši ima na voljo 6 ur, mlajši pa 4 ure. Mama je vedno odločala kdo bo na vrsti s pomočjo poštenega kovanca. Ker je ugotovila, da je starejši sin v seštevku več ur za računalnikom kot mlajši, se je odločila uporabiti risalni žebliček. Ve, da pri metu žebliček večkrat konča obrnjen navzdol, zato je to stanje dodelila mlajšemu. In res se je izkazalo, da je mlajši brat sedaj večkrat na vrsti. V skupnem seštevku pa sta približno enako za računalnikom in tudi mlajši sin se ne pritožuje več.

Pri nalogi nas bo zanimalo, kako preveriti, če je doma narejena kocka poštena. Hkrati pa podatke primerjali s pošteno kocko.

Kolikšna je verjetnost, da pri slučajnem metu risalnega žeblička konica konča obrnjena navzgor? Ali sta obe stanji enako verjetni ali je katero stanje bolj pogosto kot drugo. Konico žeblička bomo večkrat skrajšali in ponovili poskuse. Ugotovili bomo, ali je možno s krajšanjem konice doseči, da bosta oba izida enako verjetna, kot pri poštem kovancu. Hkrati pa, ali obstaja kakšna odvisnost med dolžino konice in verjetnostjo, da konica konča obrnjena navzgor.

Na koncu bomo poskusili ugotoviti, kakšno porazdelitev dobimo, če ob slučajnem metu poštene kocke in risalnega žeblička združimo njuni vrednosti z neko matematično funkcijo. Naprimer ob metu kocke pade število 6 in ob metu risalnega žeblička pristane konica obrnjena navzgor. V tem primeru za žebliček izberemo vrednost 1 in ti dve števili seštejemo, odštejemo ali pa kaj drugega. Pri vsoti bi sešteli števili 6 in 1 ter zabeležili rezultat. Poskus se ponovi večkrat in z rezultatov poskusimo ugotoviti porazdelitev.

V 2. poglavju bomo opisali, katere statistične pakete smo uporabili pri analizi podatkov. V 3. poglavju bomo predstavili podatke, ki smo jih pridobili z obema kockama. Podatke bomo analizirali in jih prikazali na različne načine. S testno statistiko bomo preverili, katera kocka je poštena oziroma nepoštena.

V 4. poglavju bomo ugotovili, kako dolžina konice vpliva na verjetnosti obeh stanj. Uporabili bomo linearno regresijo in z njo na grafu predstavili odvisnost naših spremenljivk.

V 5. poglavju bomo dobili kombinirano porazdelitev dveh slučajnih spremenljivk. Vzeli bomo minimalno vrednost obeh spremenljivk. Vse možne kombinacije vrednosti bomo predstavili s tabelo. Končno porazdelitev bomo predstavili s histogramom in razložili ugotovitve.

V zadnjem poglavju bomo opisali ugotovitve, ki smo jih pridobili z raziskavo.

2 Poskusi in orodja

Podatke o skupni porazdelitvi kocke in žeblička za n -poskusov smo pridobili s pomočjo programskega jezika Python. Za najboljše rezultate, je potrebno velikokrat ponoviti poskus, zato smo si pomagali z računalnikom. Za met kocke smo uporabili generator naključnih števil z mejami od 1 do 6. Za oba izida risalnega žeblička smo upoštevali verjetnosti, ki smo ju izračunali glede na naš vzorec.

Za risanje grafov smo uporabili knjižnico *matplotlib* v programskem jeziku Python. Za razne obdelave podatkov in statistične funkcije pa smo uporabili knjižnici *NumPy* in *SciPy*, prav tako v Python-u.

3 Met kocke

3.A Poštena kocka

Za poskus potrebujemo navadno igralno kocko. Podatke smo pridobili sami, tako da smo kocko vrgli 180-krat in zabeležili posamezno število pik ob metu. Možni izidi od 1 do

6. Ker je kocka poštena, naj bi teoretično vsako število pik padlo 30-krat. Če slučajna spremenljivka X šteje število pik ob slučajnem metu kocke, potem je

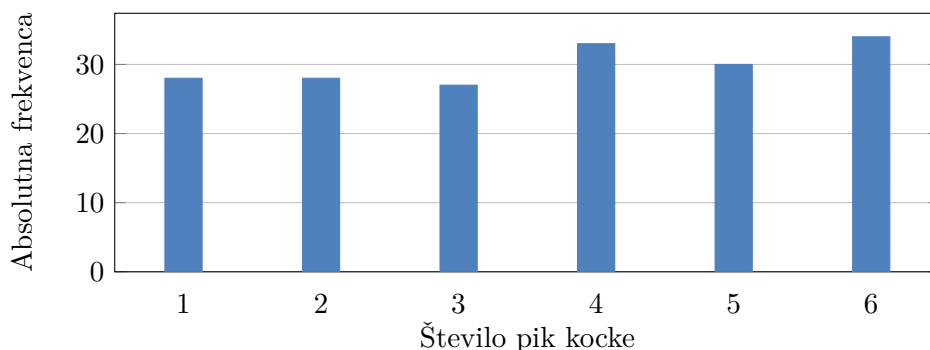
$$X \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right).$$

n	1	2	3	4	5	6
1 do 20	4	3	1	4	6	2
1 do 40	5	5	3	9	13	5
1 do 60	9	6	5	13	16	11
1 do 80	17	11	8	13	18	13
1 do 100	19	14	13	18	22	14
1 do 120	22	15	19	20	25	19
1 do 140	24	18	23	25	29	21
1 do 160	27	22	26	29	30	26
1 do 180	28	28	27	33	30	34

Tabela 1: Število padcev posameznih pik od 1 do n metov.

V zadnjem poskusu tabele 1 je vidno, da frekvence vedno bolj nihajo proti teoretičnim frekvencam. To lahko bolj podrobno prikažemo s histogramom.

Porazdelitev poštene kocke pri 180 metih.

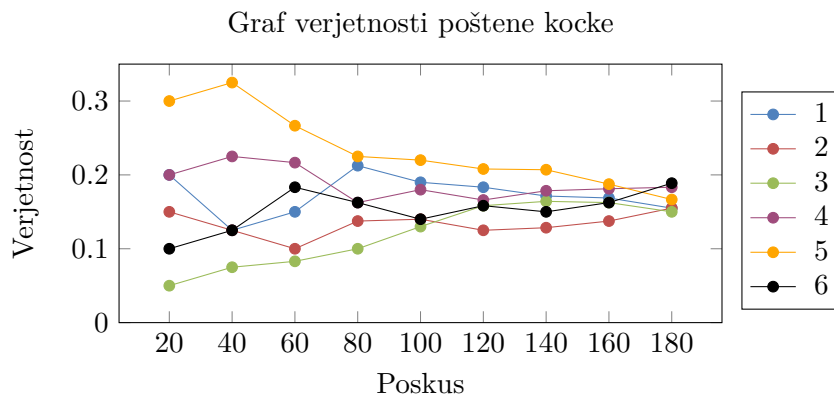


Slika 3: Absolutne frekvence pik kocke po 180-tih metih poštene kocke.

Slika 3 predstavlja, da so frekvence posameznih vrednosti skoraj enakomerno porazdeljene. Do raznih odstopanj pride zaradi našega naključnega vzorca, če bi želeli bolj enakomerno porazdelitev, bi bilo potrebno povečati število poskusov. Pri zelo velikem številu poskusov (primer $n = 1000000$), naj bi bile absolutne frekvence zelo blizu teoretičnih. Uporabili smo zakon velikih števil [4].

Z uporabo črtnega diagrama lahko pokažemo, kako se z večanjem števila poskusov spreminjajo verjetnosti posameznega izida. Za vsak n -ti poskus bomo v grafu za določeno

vrednost kocke prikazali verjetnost, ki se izračuna po formuli $P(A) = \frac{m}{n}$, kjer bo dogodek A predstavljal število padlih pik na kocki, število m bo število pojavitev tega dogodka do n -tega števila poskusov in število n bo število vseh poskusov.



Slika 4: Verjetnosti pik poštene kocke za vsak 20-ti poskus.

Na sliki 4 je razvidno, da z večanjem števila poskusov verjetnosti vedno manj nihajo in se vedno bolj približujejo teoretični verjetnosti, ki je $\frac{1}{6}$ oziroma 0.16. Za dani vzorec nam to pove, da naj bi bile vse pike približno enako verjetne.

Da bi res potrdili našo domnevo o poštenosti kocke, si lahko pomagamo s testno statistiko. Kocka je poštena, ko so vsi izidi enako verjetni, torej lahko govorimo, da je porazdelitev enakomerna, $X \sim U(n)$.

Naša ničelna domneva H_0 : porazdelitev je enakomerna.

Naša alternativna domneva H_a : porazdelitev ni enakomerna.

Našo kocko smo večkrat vrgli in zabeležili, kolikokrat je padla posamezna pika. To so opazovane frekvenice, ki jih označimo s f_o . Ker naj bi bila kocka poštena, naj bi bilo število padcev pik enako. To so teoretične frekvenice, ki jih označimo s f_t .

Podatke prikažemo v tabeli 2.

	1	2	3	4	5	6
f_o	28	28	27	33	30	34
f_t	30	30	30	30	30	30

Tabela 2: Opazovane in teoretične frekvenice pik pri 180-tih metih poštene kocke.

Zanima nas, ali so takšna odstopanja samo pri tem naboru metov in je naša kocka vseeno poštena ali res tako odstopajo, ker je kocka nepoštena. Naj bo X slučajna spremenljivka,

ki šteje koliko pik je padlo ob metu kocke. Testno statistiko (TS) izračunamo po formuli:

$$TS = \sum_{i=1}^k \frac{(f_t - f_o)^2}{f_t},$$

kjer je $k = 6$ število ploskev kocke oziroma velikost zaloge vrednosti slučajne spremenljivke X . Izračun:

$$TS = \frac{(30 - 28)^2}{30} + \frac{(30 - 28)^2}{30} + \frac{(30 - 27)^2}{30} + \frac{(30 - 33)^2}{30} + \frac{(30 - 30)^2}{30} + \frac{(30 - 34)^2}{30} = 1.4.$$

Vrednost testne statistike nam pove, da odstopanja opazovanih frekvenc od teoretičnih niso bila tako velika. Sedaj pa izračunamo vrednost kritičnega območja s $(k - 1)$ -prostostnimi stopnjami in stopnjo značilnosti α . Ker ima kocka 6 izidov, je število prostostnih stopenj enako 5. Ker je naš vzorec velik in pri testiranju ne želimo biti prestrogi, bomo za stopnjo značilnosti vzeli $\alpha = 5\%$. Za manjše vzorce se vzame večji α , tudi do 10%. Če bi želeli pri velikem vzorcu biti bolj strogi, bi vzeli $\alpha = 1\%$. Ker gre za enostranski test, je kritična vrednost enaka

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.95}(5) = 11.1.$$

Ker je $TS < 11.1$, pomeni, da vrednost testne statistike ne pade v kritično območje [5], torej ničelne domneve H_0 **ne zavrnamo** in glede na naš vzorec sklepamo, da je kocka **poštena**.

3.B Nepoštena kocka

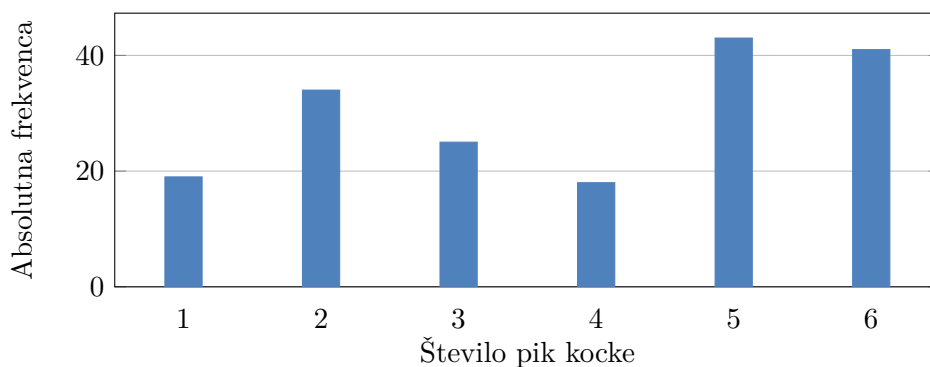
Tokrat potrebujemo navaden mehek bonbon, da ga lahko preoblikujemo v kocko. Na vsako stran bonbona narišemo pike in beležimo število pik, ki pade ob posameznem metu. Poskus bomo ponovili 180-krat. Ker je kocka lahko nepoštena, lahko pričakujemo, da se bodo opazovane frekvence razlikovale od teoretičnih - ni pa nujno. V tabeli 3 so prikazani podatki za naš poskus.

n	1	2	3	4	5	6
1 do 20	2	5	3	3	3	4
1 do 40	5	8	4	5	8	10
1 do 60	5	13	5	9	14	14
1 do 80	5	14	7	10	20	24
1 do 100	8	18	13	11	23	27
1 do 120	14	20	15	13	26	32
1 do 140	16	26	18	14	32	34
1 do 160	16	28	21	17	39	39
1 do 180	19	34	25	18	43	41

Tabela 3: Število padcev posameznih pik od 1 do n metov

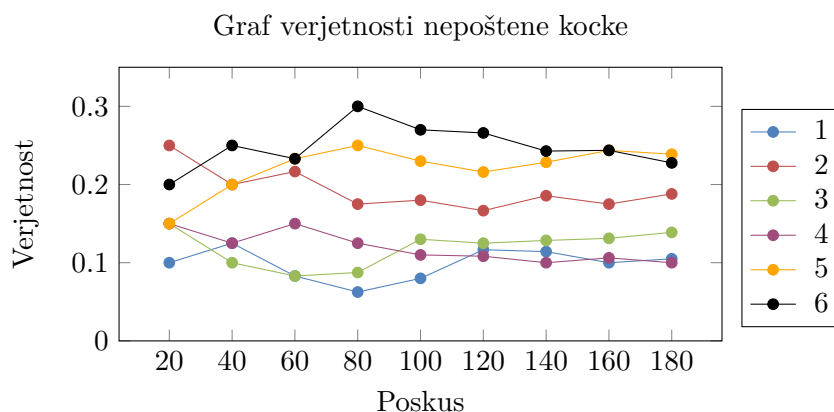
Tokrat se v zadnjem poskusu vidi, da frekvence med seboj zelo odstopajo, primer: 5 in 6 pik bolj pogosto padejo, kot pa 1 in 4. To nakazuje, da je kocka morda res nepoštena.

Porazdelitev nepoštene kocke pri 180 metih.



Slika 5: Absolutne frekvence pik kocke po 180-tih metih nepoštene kocke.

Slika 5 prikazuje, da so absolutne frekvence zelo različne glede na naš vzorec. Ponovno kot pri pošteni kocki s črtnim diagramom prikažemo, kako se verjetnosti spreminjajo.



Slika 6: Verjetnosti pik nepoštene kocke za vsak 20-ti poskus.

V tem primeru verjetnosti bolj odstopajo in se ne približujejo $\frac{1}{6}$ oziroma $0.1\bar{6}$. Še vseeno pa s testno statistiko preverimo domnevo o poštenosti.

Domnevo bomo uporabili enako kot pri pošteni kocki in v primeru, da je kocka nepoštena, bomo domnevo zavrnili. Podatke o frekvencah prikažemo v tabeli 4.

	1	2	3	4	5	6
f_o	19	34	25	18	43	41
f_t	30	30	30	30	30	30

Tabela 4: Opazovane in teoretične frekvence pik pri 180-tih metih nepoštene kocke.

Zanima nas, ali so tako velika odstopanja samo pri tem naboru metov ali so znak nepoštenosti. Naj bo X ponovno slučajna spremenljivka, ki šteje koliko pik je padlo ob metu kocke. Izračun:

$$TS = \frac{(30 - 19)^2}{30} + \frac{(30 - 34)^2}{30} + \frac{(30 - 25)^2}{30} + \frac{(30 - 18)^2}{30} + \frac{(30 - 43)^2}{30} + \frac{(30 - 41)^2}{30} = 19.87.$$

Kritična vrednost je enaka

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.95}(5) = 11.1.$$

V tem primeru je $TS > 11.1$, pomeni, da vrednost testne statistike pade v kritično območje, torej ničelno domnevo H_0 **zavrnamo** in glede na naš vzorec sklepamo, da je kocka **nepoštena**.

4 Met risalnega žeblička

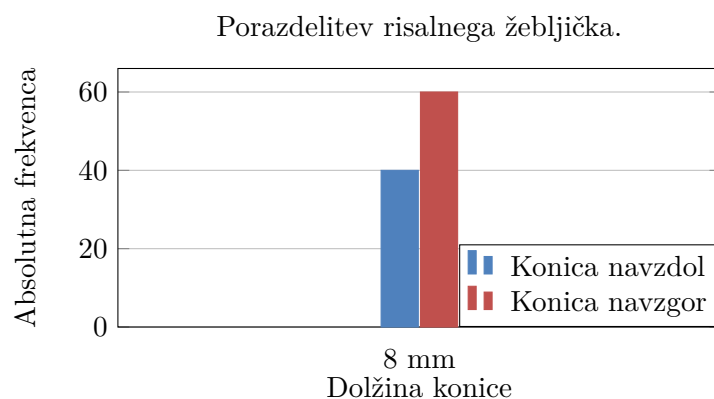
Pri tem poskusu potrebujemo navaden risalni žebliček. Naš žebliček ima krožno glavo polmera $4.5mm$ in konico dolžine $8mm$. Zanima nas, če ob slučajnem metu zabeležimo njegov položaj, kolikšna je verjetnost, da je konica obrnjena navzgor ali pa navzdol. Torej ali žebliček stoji ali leži. Poskus izvedemo 100-krat in poskusimo iz podatkov ugotoviti njegovo porazdelitev. Ali je žebliček pošten ali je katero stanje bolj pogosto kot drugo. Žebliček je pošten, ko sta oba izida enako verjetna in lahko nanj gledamo kot na kovanec. Podatke za žebličke različnih dolžin smo pridobili sami, tako da smo konice žebličkov krajšali s klešči in 100-krat vrgli posamezen žebliček.

S tabelo prikažemo, kolikokrat je bila konica obrnjena navzgor oziroma navdol.

n	Navdol	Navzgor
1 do 10	4	6
1 do 20	6	14
1 do 30	8	22
1 do 40	12	28
1 do 50	15	35
1 do 60	19	41
1 do 70	21	49
1 do 80	29	51
1 do 90	35	55
1 do 100	40	60

Tabela 5: Absolutne frekvence obeh stanj meta žeblička za vsak 10-ti poskus.

Z vzorca v tabeli 5 lahko vidimo, da bo konica večkrat obrnjena navzgor kot pa navzdol in to v 60% primerov. S histogramom predstavimo porazdelitev.



Slika 7: Porazdelitev meta risalnega žeblička po 100 metih.

Naj bo X slučajna spremenljivka, ki beleži stanje risalnega žeblička ob slučajnem metu. Zaloga vrednosti spremenljivke zavzame dve vrednosti (konica obrnjena navzdol - 0, konica obrnjena navzgor - 1). Torej je indikatorska s porazdelitvijo

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

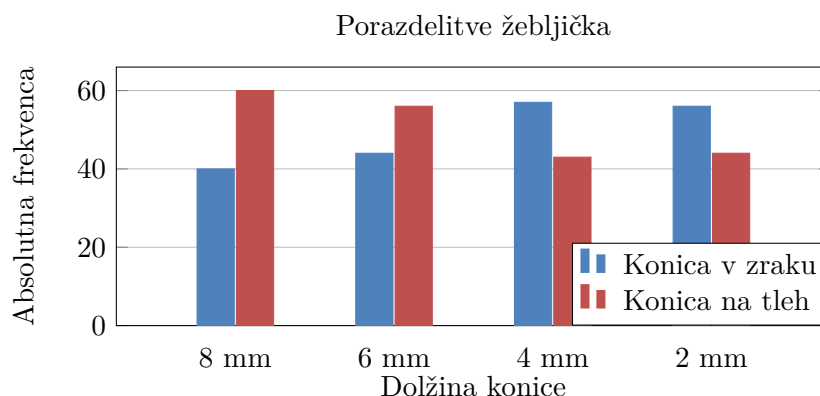
Podatke o verjetnosti smo dobili iz prejšnjih meritev po 100 slučajnih metih. Poskusimo skrajšati konico in preverimo, če se porazdelitev spremeni. Skrajšali jo bomo večkrat (za 2 mm) in preverili, če lahko dosežemo, da bo verjetnost obeh izidov približno enaka 50%.

Meritve v tabeli 6 smo pridobili, tako da smo s kleščami skrajšali konico in zabeležili izide za 100 metov.

n	8 mm		6 mm		4 mm		2 mm	
	Navzdol	Navzgor	Navzdol	Navzgor	Navzdol	Navzgor	Navzdol	Navzgor
1 do 10	4	6	6	4	7	3	4	6
1 do 20	6	14	11	9	13	7	8	12
1 do 30	8	22	15	15	18	12	16	14
1 do 40	12	28	20	20	25	15	19	21
1 do 50	15	35	24	26	29	21	23	27
1 do 60	19	41	27	33	37	23	30	30
1 do 70	21	49	31	39	44	26	38	32
1 do 80	29	51	34	46	52	28	45	35
1 do 90	35	55	39	51	56	34	51	39
1 do 100	40	60	44	56	57	43	56	44

Tabela 6: Zabeležene meritve padca žeblička ob različnih dolžinah konice.

S krajšanjem konice se frekvence spreminjajo in kot kaže je konica večkrat obrnjena navzdol kot pa navzgor. Porazdelitve so vidne na sliki 8.



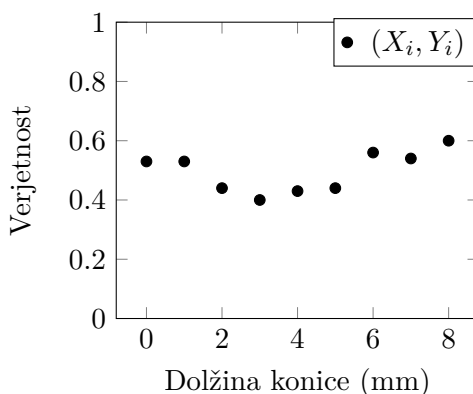
Slika 8: Porazdelitve padca žeblička pri različnih dolžinah konice.

Na naših vzorcih zgleda, da ko konico skrajšamo na manj kot 6 mm, se porazdelitev obrne. Sklepamo, da je približno pri 4.5 mm porazdelitev morda enakomerna, saj toliko meri tudi polmer žeblička. Da bomo bolj prepričani o našem sklepanju, naredimo več vzorcev, tako da konico postopoma skrajšujemo za en milimeter in naredimo raztreseni graf na katerem bomo opazili morebitno korelacijo med dolžino konice in verjetnostjo, da bo konica v zraku. Naj bo X spremenljivka za dolžino konice v mm in Y verjetnost, da bo konica obrnjena navzgor pri vzorcu velikosti 100. V tabeli 7 so prikazane meritve, ki smo jih pridobili, ko smo 9-krat izbrali naključen vzorec velikosti 100 in izračunali verjetnost, da bo ob metu konica obrnjena navzgor.

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_i	0.53	0.53	0.44	0.4	0.43	0.44	0.56	0.54	0.6

Tabela 7: Zabeležene verjetnosti 9 različnih dolžinah in vzorcev velikosti 100.

Postopek ponovimo še za različne dolžine konic in pare (X_i, Y_i) prikažemo z grafom.



Slika 9: Raztreseni graf, ki za različne dolžine konic prikazuje verjetnost, da bo konica obrnjena navzgor.

Po več vzorcih zglada, da porazdelitev ni enakomerna pri 5 mm, ampak bolj pri 0 mm in pa 1 mm. To je tudi smiselno, saj pri 0 mm lahko na žebliček gledamo kakor kovanec, pri 1 mm pa zaradi vdolbine ploskve žeblička. Namreč ploskev ni ravna, ampak je izdolbljena in 1 mm konice na drugi strani pa morda enakomerno porazdeli utež na obe strani žeblička.

Na sliki 9 zglada, kot da sta spremenljivki linearno odvisni. Poskusimo linearnost dokazati z uporabo linearne regresije, da določimo premico, ki se najboljše prilega našim podatkom. Želeli bi tudi oceniti Y pri znanem X . Parametra se izračunata po formuli $\hat{b} = \frac{k_{xy}}{s_x^2}$ in $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x}$, kjer k_{xy} predstavlja vzorčno kovarianco med spremenljivkama X in Y , s_x^2 predstavlja varianco vzorca spremenljivke X , $\bar{x}$ in $\bar{y}$ pa sta vzorčni povprečji spremenljivk. Tako cenilko na Y pri danem X zapišemo z $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b} \cdot X$. Najprej izračunamo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 4,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = 0.496.$$

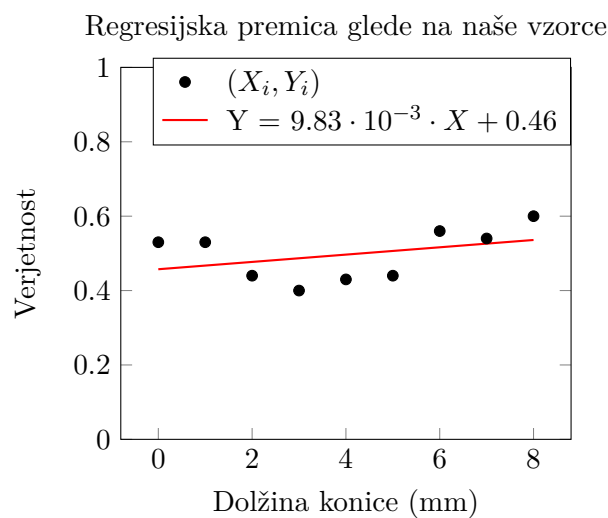
Vzorčno kovarianco spremenljivk

$$k_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n - 1} = 0.0737,$$

ker je $k_{xy} > 0$, gre za pozitivno povezanost spremenljivk.

$$\text{Varianco } s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = 7.5.$$

Izračun parametra $\hat{b} = \frac{k_{xy}}{s_x^2} = \frac{0.0737}{7.5} = 0.00983$ in $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = 0.496 - 0.00983 \cdot 4 = 0.457$. Končna enačba regresijske premice je $Y = 0.457 + 0.00983 \cdot X$ in je predstavljena na sliki 10.



Slika 10: Vzorci pri različnih dolžinah konice in regresijska premica.

5 Kombinirana porazdelitev

Zanima nas, kakšna je skupna porazdelitev med kocko in žebličkom, če za vsak met obe vrednosti združimo z neko matematično funkcijo. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki beleži stanje risalnega žeblička ob slučajnem metu. Zaloga vrednosti spremenljivke zavzame dve vrednosti (konica obrnjena navzdol - 1, konica obrnjena navzgor - 2). Slučajna spremenljivka Y pa šteje število pik, ki pade ob metu kocke. Porazdelitvi sta

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix},$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Slučajni spremenljivki sta med seboj neodvisni, ker $\forall x, y : P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ in sta podani s skupno porazdelitvijo, ki je prikazana v tabeli 8.

$\begin{smallmatrix} Y \\ \backslash X \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Tabela 8: Kombinirana porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y .

Naj bo slučajni vektor $Z = \min(X, Y)$, torej ob obeh metih vzamemo najmanjšo vrednost. Zaloga vrednosti spremenljivke Z je $\{1, 2\}$. Posamezno vrednost je mogoče dobiti na naslednje načine:

1 : $\min(1, 1), \min(1, 2), \min(1, 3), \min(1, 4), \min(1, 5), \min(1, 6), \min(2, 1)$

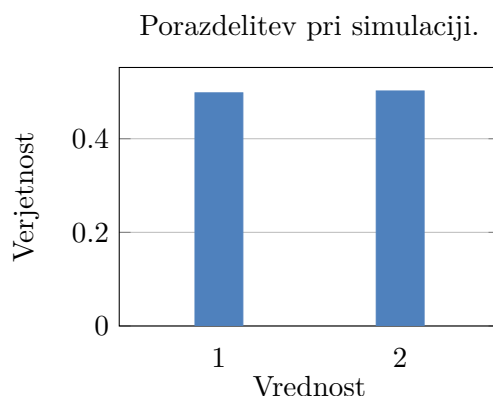
2 : $\min(2, 2), \min(2, 3), \min(2, 4), \min(2, 5), \min(2, 6)$

Za dan par lahko v tabeli vidimo verjetnost in verjetnosti med seboj seštejemo.

$$P(Z = 1) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = 0.5$$

$$P(Z = 2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0.5$$

Dobimo končno porazdelitev $Z \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, ki je ravno enakomerna in tudi indikatorska. Takšna porazdelitev pride samo zaradi porazdelitve spremenljivke X . Pri drugačni porazdelitvi X bi dobili samo indikatorsko porazdelitev.



Slika 11: Porazdelitev nove slučajne spremenljivke $Z = \min(X, Y)$.

Na sliki 11 je prikazana porazdelitev, pri kateri smo z računalnikom generirali 50000 naključnih metov.

6 Zaključek

Spoznali smo, da se poštena igralna kocka in naša doma izdelana razlikujeta. Doma izdelana se je res izkazala za nepošteno, ker so bila odstopanja med frekvencami prevelika.

To smo tudi preverili s testno statistiko.

Naš risalni žebliček ni imel izida enako verjetna. Pri daljši konici bi pričakovali, da bo konica ob slučajnem metu večkrat obrnjena navzdol zaradi njene teže. S krajšanjem konice bi pričakovali, da bo konica večkrat obrnjena navzgor in brez konice bi se risalni žebliček moral obnašati kot pošten kovanec. Zanimiva je bila ugotovitev, da je glede na naše dolžine konic učinek ravno obraten in da prvotno razmišljanje ni bilo ustrezno. Morda je žebliček spremenil obliko zaradi odbijanja ob površino pri ponavljanju poskusa in smo zato dobili takšne meritve. Morda pa je daljša konica preprečila, da bi ob metu večkrat pristal na tleh. Ugotovili smo, da obstaja linearna odvisnost med kranjšanjem konice in verjetnostjo posameznega položaja žeblička.

V našem primeru je bila porazdelitev risalnega žeblička ob slučajnem metu enaka $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$. Če smo ob slučajnem metu poštene kocke in tega žeblička vzeli njuno minimalno vrednost, smo pri velikem številu poskusov dobili enakomerno porazdelitev. Torej lahko bi rekli, da smo iz poštene kocke in nepoštenega žeblička dobili pošten žebliček z enako verjetnostjo obeh pozicij.

Literatura

- [1] A. Jurišić: Verjetnostni račun in statistika. Fakulteta za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani, 2015.
- [2] M. Hladnik: Verjetnost in statistika. Založba FE in FRI, Ljubljana 2002
- [3] W. Mendenhall in T. Sincich: Statistics for engineering and the sciences, 4. izdaja, Prentice Hall, 1995.
- [4] P. Révész, Z. W. Birnbaum in E. Lukacs: Probability and Mathematical Statistics, poglavje The Laws of Large Numbers, 1981
- [5] t-test v praksi,
<http://www.benstat.si/blog/t-test-v-praksi>